p-mat

Attomat

25.06.2020

Vzorová řešení

Kategorie 7, 8, 9, Sekunda, Tercie, Kvarta, Open

Česká verze

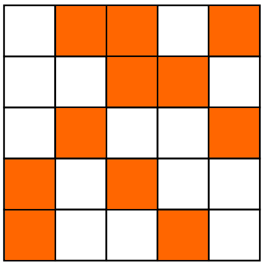
Úloha 01. Řada čísel

Terka si píše řadu čísel. Začala tím, že si napsala první dvě čísla 1 a 2. Teď dopisuje čísla následovně: Sečte poslední dvě čísla v řadě a součet napíše jako další číslo řady. Takže za čísla 1 a 2 napíše Terka třetí číslo 1+2=3. Jako čtvrté číslo by napsala 2+3=5. Když měla Terka napsané desáté číslo, tak ji to přestalo bavit. Jaké bylo poslední číslo, které Terka napsala do řady?

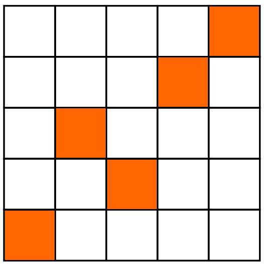
Výsledek: 89
Řešení: První a druhé číslo, které Terka napsala do řady, jsou 1 a 2.
Třetí číslo je 1+2=3.
Čtvrté číslo je 2+3=5.
Páté číslo je 3+5=8.
Šesté číslo je 5+8=13.
Sedmé číslo je 8+13=21.
Osmé číslo je 13+21=34.
Deváté číslo je 21+34=55.
Desáté číslo je 34+55=89.
Takže poslední číslo, které Terka napsala, je číslo 89.

Úloha 02. Přebarvování

Petr si nakreslil tabulku 5×5. Některá její políčka vybarvil naoranžovo tak, jako vidíš na obrázku. Kolik čtverečků musí přebarvit opět nabílo, aby bylo v každém řádku a v každém sloupci přesně jedno políčko vybarvené naoranžovo?



Výsledek: 6
Řešení: V každém řádku má zůstat přesně jeden vybarvený čtvereček. Takže musí zůstat 5 vybarvených čtverečků. Všech vybarvených čtverečků je nyní 11. To znamená, že Petr musí přebarvit 11-5=6 čtverečků, a to například takto:



Úloha 03. Optimizmus

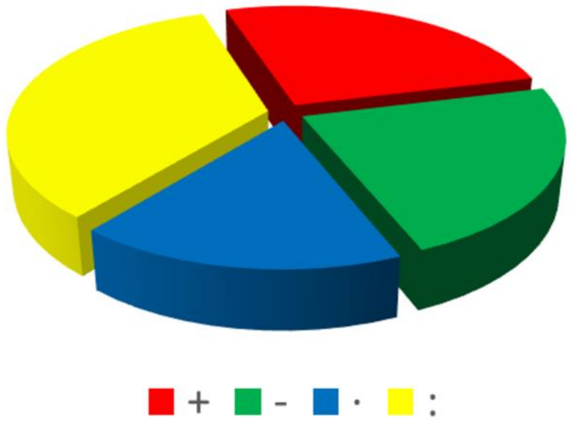
Lukáš si vymyslel optimistická čísla. Optimistické číslo je takové číslo, jehož cifry zleva doprava vzrůstají. Například čísla 1489, 789 a 3 jsou optimistická, ale čísla 55 a 1492 ne. Jaké je největší optimistické číslo?

Výsledek: 123456789

Řešení: Aby bylo číslo co největší, chceme v něm použít co nejvíc cifer. Cifru 0 zjevně použít nemůžeme, protože by ní muselo číslo začínat. Použijeme proto jen cifry od 1 do 9. Je jen jeden způsob, jak je můžeme uspořádat do čísla, jehož cifry budou zleva doprava růst. Proto je největším optimistickým číslem číslo 123456789.

Úloha 04. Oblíbené znaménko

V zemi Attomatovo proběhly volby o nejoblíbenější znaménko. Výsledky voleb byly zveřejněny pomocí grafu na obrázku. Které znaménko získalo nejvíc hlasů, a tak se stalo nejoblíbenějším znaménkem v zemi Attomatovo?



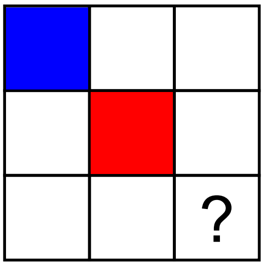
a) + *b) −* *c) ·* *d) :*

Výsledek: d) :

Řešení: Čím více hlasů nějaké znaménko dostalo, tím větší část má v grafu. Vítězem se tak muselo stát to znaménko, kterému patří v grafu největší část. Největší část grafu je žlutá, která patří hlasům pro znaménko dělení. Znaménko d) : je proto nejoblíbenějším znaménkem v zemi Attomatovo.

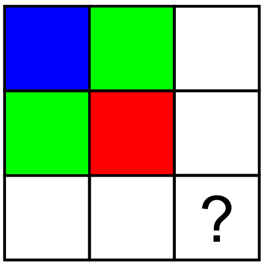
Úloha 05. RGB čtverečky

Laura si nakreslila tabulku 3×3. Začala její čtverečky vybarvovat červenou, modrou a zelenou barvou. Některé čtverečky už vybarvila tak, jak vidíš na obrázku. Zbylé čtverečky chce vybarvit tak, aby každá trojice čtverečků, které leží v jednom řádku, nebo v jednom sloupci, obsahovala čtvereček každé z těchto tří barev. Jakou barvu bude mít čtvereček s otazníkem?

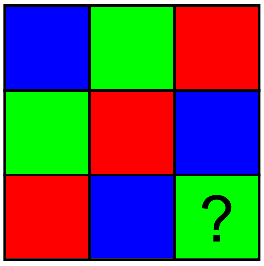


a) červenou *b) zelenou* *c) modrou* *d) nedá se určit*

Výsledek: b) zelenou
Řešení: Podívejme se nejdřív na čtverečky, které sousedí s již vybarvenými čtverečky. Oba se nachází v řádku nebo sloupci s modrým a červeným čtverečkem. Takže musí být zelené. Dostáváme vybarvení jako na tomto obrázku:



Dále již umíme jednoznačně doplňovat třetí chybějící barvu v řádcích a sloupcích, dokud se nedopracujeme k této tabulce:



Čtvereček s otazníkem tak musí mít b) zelenou barvu.

Úloha 06. Čtení myšlenek

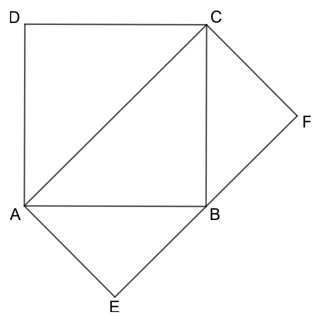
Katka s Miškou mají 5 kuliček. Očíslovaly je čísly 1 až 5 a daly je do neprůhledného pytlíku. Potom si Katka vytáhla dvě z kuliček a Miška jednu ze zbylých kuliček. Když se Katka podívala na čísla na kuličkách, které si vytáhla, prohlásila: „Určitě jsi si vytáhla kuličku s lichým číslem." Jaký je součet čísel na kuličkách, které si vytáhla Katka?

Výsledek: 6
Řešení: Aby mohla Katka s jistotou říct větu „Určitě jsi si vytáhla kuličku s lichým číslem," musela mít jistotu, že v pytlíku nebyly po jejím tahání žádné kuličky se sudými čísly. Takže všechny tyto kuličky si musela vytáhnout Katka. Katka si vytáhla jen dvě kuličky, ale kuličky s sudým číslem jsou také jen dvě-s čísly 2 a 4. Takže Katka si musela vytáhnout zrovna tyto dvě kuličky. Proto je součet čísel na kuličkách, které si Katka vytáhla, rovný 2+4=6.

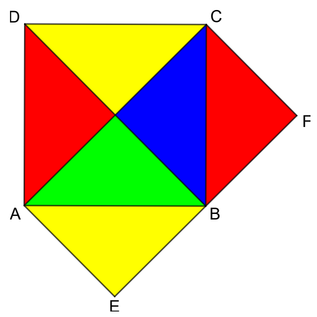
Úloha 07. Malování

Andrea si nakreslila čtverec ABCD. K němu si dokreslila obdélník AEFC tak, že bod B ležel na úsečce EF. Kdyby chtěla celý čtverec ABCD zabarvit namodro, použila by 100 gramů barvy. Kolik gramů barvy by použila, pokud by chtěla namodro zabarvit obdélník AEFC?

Výsledek: 100
Řešení: Nakresleme si k zadání obrázek:



Rozdělme si čtverec ABCD na několik trojúhelníků jako na tomto obrázku:



Vidíme, že i čtverec ABCD, i obdélník AEFC mají společný zelený a modrý trojúhelník. Zároveň umíme přesunout červený a žlutý trojúhelník ze čtverce ABCD do obdélníku AEFC tak, aby byl celý obdélník AEFC pokrytý barevnými trojúhelníky. Proto je třeba na zabarvení obdélníku AEFC stejné množství barvy jako na zabarvení čtverce ABCD, takže Andrea potřebuje 100 gramů barvy.

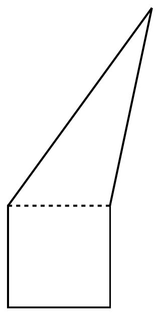
Úloha 08. Láska k číslům

Ludce se líbí jen taková čísla, která se dají zapsat jako součin dvou stejných přirozených čísel. Například číslo 81 se Ludce líbí, protože se dá zapsat jako 81=9·9. Které z těchto čísel se Ludce nelíbí?
a) 169 *b) 196* *c) 225* *d) 252*

Výsledek: d) 252
Řešení: Čísla 169, 196 a 225 se Ludce líbí, protože 169=13·13, 196=14·14 a 225=15·15. Číslo 252 ale leží mezi čísly 225=15·15 a 256=16·16, takže neexistuje žádné přirozené číslo, které bychom mohli vynásobit sebou samotným, abychom dostali číslo 252. Proto se Ludce nelíbí číslo d) 252.

Úloha 09. Krájení pětiúhelníku

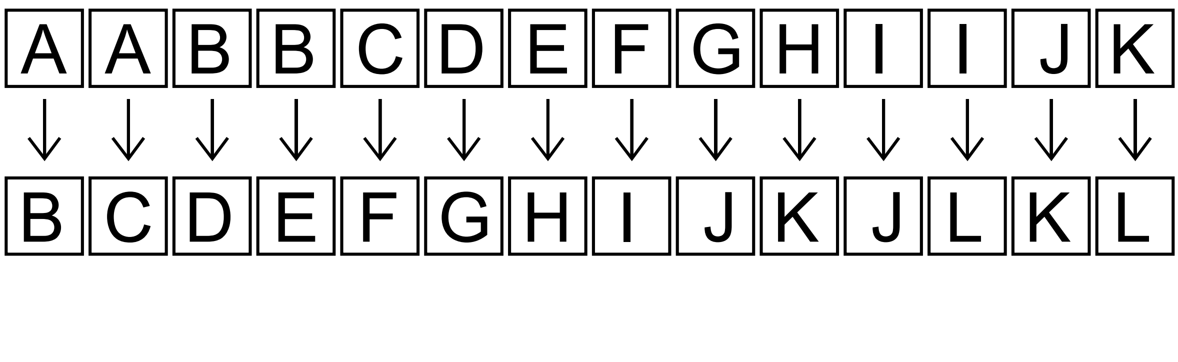
Patrik si nakreslil pětiúhelník. Ten se dal rozdělit na čtverec a trojúhelník tak, jak vidíš na obrázku. Navíc měl čtverec stranu dlouhou 5 cm. Patrika překvapilo, když zjistil, že čtverec má stejný obvod jako trojúhelník. Kolik centimetrů měřil obvod Patrikova pětiúhelníku?



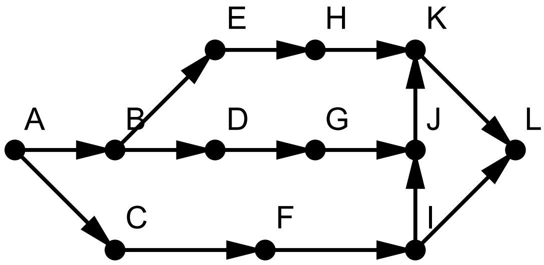
Výsledek: 30
Řešení: Čtverec má stranu dlouhou 5 cm, takže jeho obvod je 5+5+5+5=20 cm. Trojúhelník má dle zadání stejný obvod, a proto má také obvod 20 cm. Čtverec a trojúhelník mají ale jednu stranu dlouhou 5 cm společnou. Proto na obvodu pětiúhelníku leží z každého z těchto útvarů 20-5=15 cm. Protože toto jsou jediné délky na obvodě a čtverec s trojúhelníkem se už nikde nepřekrývají, musí být obvod pětiúhelníku 15+15=30 cm.

Úloha 10. Chrám zkázy

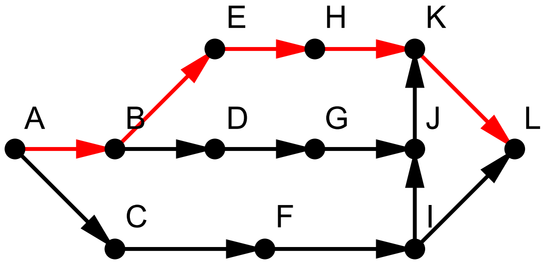
Indiana Jones se ocitl v labyrintu. Labyrint je tvořený místnostmi A až L. Mezi nimi vedou jen jednosměrné cesty. Možné cesty vidíš na obrázku, tedy například z místnosti A se Indiana Jones umí dostat do místností B a C. Indiana Jones se nachází v místnosti A. Kolika různými cestami se může dostat až do místnosti L?

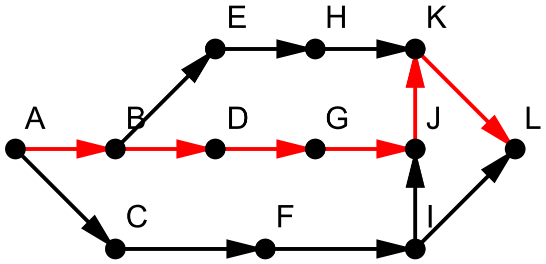


<u>Výsledek:</u> 4
<u>Řešení:</u> Nakresleme si následující plán, který zachycuje, odkud kam se umí Indiana Jones dostat:

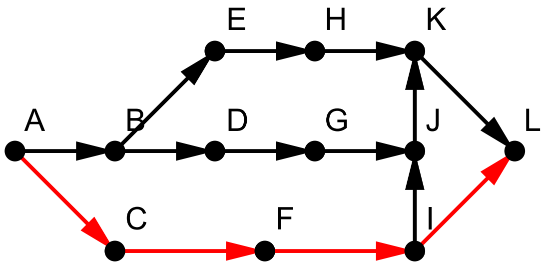


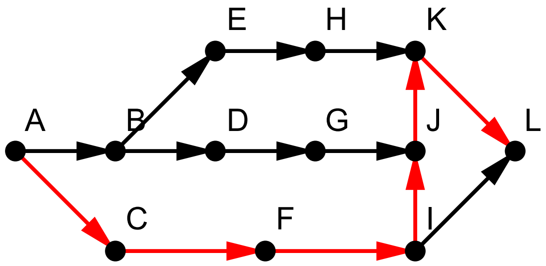
Hned v místnosti A se Indiana Jones může rozhodnout ze dvou možností.
Pokud se rozhodne jít přes místnost B, tak znova dostane na výběr ze dvou možností. V obou případech ale bude už jeho cesta do místnosti L jednoznačně určená. V tomto případě tak dostáváme tyto dvě možnosti cesty do místnosti L:





Pokud se rozhodne jít přes místnost C, tak musí projít až do místnosti I, kde opět dostane na výběr z dvou možností. Po tomto výběru již ale bude jeho cesta do místnosti L jednoznačná. Proto bude mít Indiana Jones v tomto případě tyto dvě možnosti:





Tím jsme vyčerpali všechny možnosti, jak může Indiana Jones opustit místnost A. Dohromady tak má Indiana Jones 2+2=4 cesty, jak se dostat z místnosti A do místnosti L.

Úloha 11. Zaokrouhlování

Marcel a Sabina si vybrali celé číslo a napsali ho na papír. Marcel ho zaokrouhlil na tisíce a dostal tak číslo o 366 větší než bylo jejich původní číslo. Sabina se rozhodla zaokrouhlit číslo na papíru na stovky. O kolik se číslo na papíru změnilo po jejím zaokrouhlení?

<u>Výsledek:</u> 34
<u>Řešení:</u> Jelikož se číslo zvětšilo o 366, muselo být zaokrouhleno nahoru, a tak se cifra na místě tisíců zvětšila o 1. Poslední tři cifry čísla, které si Marcel a Sabina vybrali, jsou proto 1000-366=634. Po zaokrouhlení na stovky se tak tyto tři cifry změní na 600. Takže číslo se zmenší o 634-600=34.

Úloha 12. Krátká

Pošťák Pat roznáší poštu na Krátké ulici, která vede ze západu na východ. Na severní straně ulice jsou domy očíslované lichými čísly od jedničky (tedy 1, 3, 5, a tak dále) a na jižní straně sudými čísly od dvojky (tedy 2, 4, 6, a tak dále). Na obou stranách ulice je stejný počet domů. Když Pat roznášel poštu po severní straně ulice, napočítal v číslech domů 4krát cifru 2. Kolikrát napočítá cifru 2, když se bude vracet jižní stranou ulice?

Výsledek: 8
Řešení: Na severní straně ulice si Pat započítá cifru dva u čísel 21, 23, 25 a 27-žádná lichá čísla domů menší než tato čísla neobsahují cifru 2. Číslo domu 29 se ale už na ulici nenachází, protože by si Pat u něho započítal další dvojku. Čísla domů na druhé straně tak končí číslem domu 28. Pat proto započítá dvojku v číslech domů 2, 12, 20, 24, 26, 28 a dvakrát v čísle 22. Dohromady proto na jižní straně napočítá cifru 2 přesně 8krát.

Úloha 13. Mašinka - mluvčí

Majo dostal na Vánoce čarovnou mluvící mašinku. Dají sa do ní vložit dvě kartičky s čísly, pěkně jedna po druhé. Mašinka poté zahlásí nějaké číslo. Majo si všiml, že když k číslu, které zahlásí mašinka, přičte číslo z druhé vložené kartičky, dostane 6násobek čísla na první vložené kartičce. Takže pokud Majo vloží například kartičky s čísly 3 a 2, tak mašinka zahlásí číslo 16. Teď si Majo přeje, aby mašinka zahlásila číslo 7, protože to je jeho oblíbené číslo. Vložil proto kartičku s číslem 7 jako první. Jakou kartičku musí vložit jako druhou, aby mu mašinka splnila jeho přání?

Výsledek: 35
Řešení: Když sčítáme číslo 7 a číslo na druhé kartičce, má nám vyjít 6násobek čísla 7, tedy číslo $6 \cdot 7=42$. Do mašinky tak musíme vložit kartičku s číslem $42-7=35$.

Úloha 14. Jazyky světa

Na vědeckou konferenci přišlo 60 vědců. Každý z nich ovládá aspoň jeden z jazyků angličtina a čínština. Anglicky mluví dvě třetiny všech vědců na konferenci, zatímco čínsky jen polovina. Kolik z vědců na konferenci mluví i anglicky i čínsky?

Výsledek: 10
Řešení: Jedna třetina všech vědců je $60:3=20$ vědců, takže dvě třetiny jsou $2 \cdot 20=40$ vědců. Anglicky proto mluví 40 vědců. Polovina všech vědců je $60:2=30$ vědců, takže 30 vědců mluví čínsky. Pokud bychom začali „přidělovat“ tyto jazyky vědcům, museli bychom nějaký jazyk „přidělit“ $40+30=70$krát. Každému vědci musíme „přidělit“ aspoň jeden jazyk. Pokud bychom každému vědci „přidělili“ jen jeden jazyk, zůstalo by nám na „přidělení“ ještě $70-60=10$ jazyků. Tyto jazyky tak musíme „přidělit“ takovým způsobem, že pokaždé vznikne vědec, který mluví oběma jazyky. Proto musí být na konferenci 10 vědců, kteří mluví anglicky i čínsky.

Úloha 15. Násobky čtyřiceti sedmi

Jonášovo oblíbené číslo je nejmenší takové přirozené číslo, že když ho přičteme k číslu 2020, tak dostaneme násobek čísla 47. Na druhé straně Miškino oblíbené číslo je nejmenší takové přirozené číslo, že když ho odečteme od čísla 2020, tak dostaneme násobek čísla 47. Jaký je součet Jonášova a Miškina oblíbeného čísla?

Výsledek: 47
Řešení: Když vydělíme číslo 2020 číslem 47, vidíme, že 2020 není násobkem čísla 47. Číslo 2020 tak leží mezi nějakými dvěma po sobě jdoucími násobky čísla 47. Pokud si tato tři čísla představíme na číselné ose, tak vzdálenost mezi největším násobkem 47 a číslem 2020 je Jonášovo oblíbené číslo a vzdálenost mezi menším násobkem 47 a číslem 2020 je zase Miškino oblíbené číslo. Součet Jonášova a Miškina oblíbeného čísla tak představuje vzdálenost mezi těmito násobky 47. Protože jsou to ale dva po sobě jdoucí násobky 47, tak je jejich vzdálenost 47. Součet Jonášova a Miškina oblíbeného čísla je proto 47.

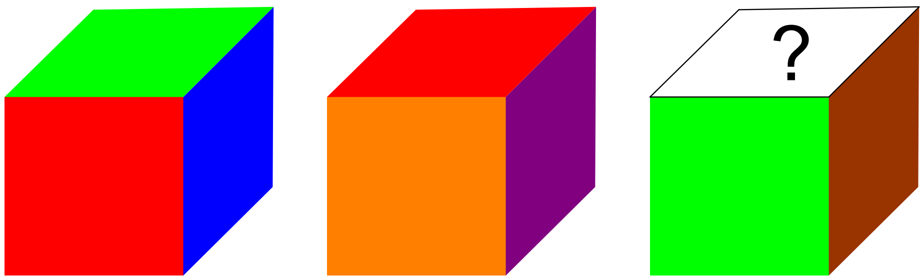
Úloha 16. Krátký součet

Matěj si napsal aspoň dvě po sobě jdoucí přirozená čísla a všechna je sečetl. Dostal součet 54. Kolik nejméně čísel mohl sečíst?

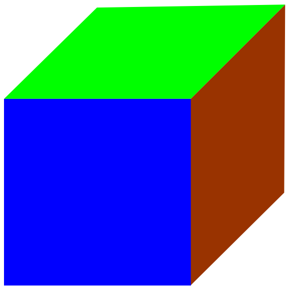
Výsledek: 3
Řešení: Zkusme, zda mohl Matěj sčítat jen dvě čísla. Nemohl, protože jedno ze sčítaných čísel musí být sudé a druhé liché. Takže součet musí být lichý, jenže 54 je sudé číslo. Takže Matěj určitě nesčítal jen dvě čísla.
Zkusme tedy, zda mohl sčítat tři čísla. V takovém případě musí být prostřední z těchto čísel rovné jejich průměru, tedy číslu 54:3=18. Když k němu přidáme jeho dva „sousedy“, čísla 17 a 19, dostaneme vyhovující trojici čísel 17, 18, 19 se součtem 17+18+19=54.
Tímto jsme ukázali, že Matěj mohl sčítat 3 čísla a méně ne, takže mohl sčítat nejméně 3 čísla.

Úloha 17. Jsi kostka, jsi kostka, jsi kostka...

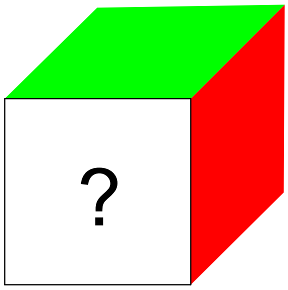
Kubo nabarvil stěny kostky. Každá stěna je nabarvená jednou barvou. Potom Kubo vyfotil tři fotky této kostky, ale pokaždé kostku trochu pootočil. Jakou barvou je nabarvená stěna označená otazníkem?



<u>Výsledek:</u> oranžovou
<u>Řešení:</u> Z obrázků vidíme, že červená stěna sousedí se zelenou, modrou, oranžovou i fialovou stěnou. Proto musí červená a hnědá strana ležet naproti sobě. Otočme první kostku tak, aby se červená schovala nalevo. Protože naproti červené je hnědá, tak uvidíme následující kostku:



Pokud tuto kostku ještě přetočíme tak, aby byla zelená stěna vepředu, tak se dostaneme do stavu jako na třetí kostce, přičemž víme, že nyní kostka stojí na modré stěně. Takže stěna označená otazníkem je ta, která je naproti modré stěně.
Vraťme se k původní první kostce a otočme ji tak, aby se červená stěna dostala na pravou stěnu. Horní stěna tímto zůstane zelená. Navíc se modrá stěna dostane dozadu, a proto bude přední stěna ta naproti modré stěně, o které jsme si už řekli, že je to ta s otazníkem. Uvidíme proto následující kostku:



Pokud nyní otočíme kostku tak, aby se červená dostala na vrchní stěnu, tak neuvidíme ani modrou, které je stále vzadu, ani zelenou, které se dostane doleva. Zároveň nevidíme hnědou, která je na spodku, protože je naproti červené. Proto musíme vidět jen červenou, fialovou a oranžovou. Tím pádem musíme vidět stav jako na druhé kostce. Jenže stěna s otazníkem se při posledním otočení nepohla a je teda stále vpředu. Na druhé kostce je ale vepředu oranžová.
Takže stěna označená otazníkem musí být oranžová.

Úloha 18. Lanovka v Tatrách

Katka jela na výlet do Tater. Jak se tak vezla lanovkou ze Štrbského plesa na Chatu pod Soliskom, počítala, kolik sedaček se vracelo naproti ní. Za celou jízdu jich napočítala 179. Kolik minut Katce trvala jízda lanovkou, pokud ze stanice lanovky vyjede sedačka každých 8 sekund?

<u>Výsledek:</u> 12
<u>Řešení:</u> V průběhu jízdy lanovkou musela Katka započítat právě jednou každou sedačku kromě té, na které se vezla. Na lanovce tak musí být 179+1=180 sedaček. Aby mohla ze stanice lanovky právě jedna sedačka každých 8 sekund, musí se jedna sedačka otočit v druhé stanici a přijet zpátky za 180·8=1440 sekund. Katka se ale vezla jen polovinu tohoto času, protože jela jen z jedné stanice do druhé. To znamená, že musela být na lanovce 1440:2=720 sekund. Katce tak trvala jízda lanovkou 720:60=12 minut.

Úloha 19. Úhlopříčka

Majo si nakreslil čtyřúhelník ABCD. Strany tohoto čtyřúhelníku mají délky |AB|=5 cm, |BC|=17 cm, |CD|=5 cm a |DA|=9 cm. Navíc je délka úhlopříčky BD vyjádřená v centimetrech celé číslo. Kolik centimetrů měří úhlopříčka BD?

Výsledek: 13
Řešení: Z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku BCD vyplývá, že součet délek úseček BD a CD musí být větší než délka úsečky BC. Proto musí být délka úsečky BD větší než 17-5=12 cm. Z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku ABD zase vyplývá, že délka úsečky BD musí být menší než součet délek úseček AB a AD. Délka úsečky BD tak musí být menší než 5+9=14 cm. Jediné celé číslo, které je současně větší než 12 a menší než 14, je číslo 13, tedy délka úsečky BD musí být 13 cm.

Úloha 20. Řada jedniček a dvojek

Erik zapisuje čísla jako součet jedniček a dvojek. Záleží mu na tom, v jakém pořadí je sčítá. Číslo 3 tak umí zapsat třemi způsoby jako 1+1+1, 1+2, nebo 2+1. Kolika způsoby umí zapsat číslo 15?

Výsledek: 987
Řešení: Podívejme se, co se děje, pokud zápis čísla 15 začíná jedničkou a co se děje, pokud začíná dvojkou. Pokud začíná jedničkou, tak zbytek zápisu tvoří jedničky a dvojky se součtem 15-1=14. Na to máme tolik možností, jak zapsat číslo 14 pomocí jedniček a dvojek. Pokud začíná dvojkou, tak zbytek zápisu tvoří jedničky a dvojky se součtem 15-2=13. Na to máme tolik možností, jak zapsat číslo 13 pomocí jedniček a dvojek. Počet způsobů, jak zapsat číslo 15 pomocí jedniček a dvojek, se tak rovná součtu počtu způsobů, jak zapsat číslo 14 a jak zapsat číslo 13. Toto platí i obecně-počet možností pro libovolné číslo se rovná součtu počtu způsobů pro čísla o jedna a o dva menší. Díky tomuto umíme počty způsobů jednoduše vypočítat od malých čísel.

Pro číslo 1 máme 1 způsob zápisu.
Pro číslo 2 máme 2 způsoby zápisu.
Pro číslo 3 máme 1+2=3 způsoby zápisu.
Pro číslo 4 máme 2+3=5 způsobů zápisu.
Pro číslo 5 máme 3+5=8 způsobů zápisu.
Pro číslo 6 máme 5+8=13 způsobů zápisu.
Pro číslo 7 máme 8+13=21 způsobů zápisu.
Pro číslo 8 máme 13+21=34 způsobů zápisu.
Pro číslo 9 máme 21+34=55 způsobů zápisu.
Pro číslo 10 máme 34+55=89 způsobů zápisu.
Pro číslo 11 máme 55+89=144 způsobů zápisu.
Pro číslo 12 máme 89+144=233 způsobů zápisu.
Pro číslo 13 máme 144+233=377 způsobů zápisu.
Pro číslo 14 máme 233+377=610 způsobů zápisu.
Pro číslo 15 máme 377+610=987 způsobů zápisu.

Proto umí Erik zapsat číslo 15 přesně 987 způsoby.