# Attomat

21.05.2020

Vzorová řešení

Kategorie 7, 8, 9, Sekunda, Tercie, Kvarta, Open

Česká verze

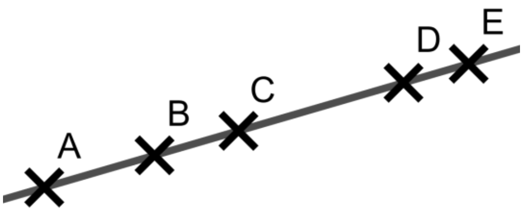
**Úloha 01. Veselá úloha**

*Pavel a Katka si vymysleli veselá čísla. Veselé číslo má jen sudé cifry. Pavel si napsal nejmenší dvojciferné veselé číslo a Katka si napsala nejmenší čtyřciferné veselé číslo. Jaký je součet Pavlova a Katčina čísla? Poznámka: Cifra 0 je sudá.*

Výsledek: 2020
Řešení: Pokud by si Pavel napsal nějaké dvojciferné číslo, muselo toto číslo mít na místě desítek jinou cifru než cifru 0. Zároveň hledáme nejmenší takové číslo, a tak muselo mít na místě desítek nejmenší sudou cifru, která je různá od nuly. A tou je cifra 2. Na místo jednotek už můžeme dát nejmenší sudou cifru - 0. Pavel si proto napsal číslo 20. Katčino číslo muselo také začínat cifrou 2, za kterou musely následovat jen cifry 0. Katka si tak napsala číslo 2000. Součet Pavlova a Katčina čísla je proto 20+2000=2020.

**Úloha 02. Přímá forma zábavy**

*Patrik si na přímku nakreslil 5 bodů v pořadí A, B, C, D, E. Nakreslil je tak, aby platilo |AC|=12 cm, |BD|=15 cm, |CE|=19 cm, |AD|=20 cm. Jaká byla délka úsečky AE v centimetrech?*




Výsledek: 31
Řešení: Bod C leží na úsečce AE, jejíž délku máme vypočítat. Proto víme, že platí |AE|=|AC|+|CE|. Délky úseček AC a CE ale známe. Proto má úsečka AE délku 12+19=31 centimetrů.

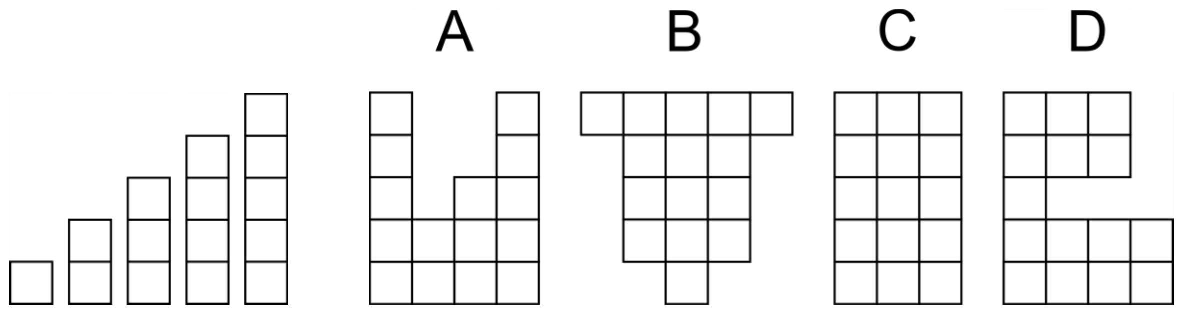
**Úloha 03. Cesta taxíkem**

*Taxikáři v Chicagu si účtují 3 dolary za první ujetou míli a potom 1 dolar za každou další míli. Kolik nejvíc mil může Kuba ujet taxíkem, pokud má 10 dolarů a ze slušnosti chce dát taxikáři 2 dolary jako spropitné?*

Výsledek: 6
Řešení: Odečtěme od Kubových 10 dolarů 2 dolary, které dá taxikáři jako spropitné a 3 dolary za první ujetou míli. Dostaneme, že Kuba má 10-2-3=5 dolarů na to, aby zaplatil za míle po jednom dolaru. Za tyto peníze dokáže ujet 5 mil. Dohromady s první mílí za 3 dolary tak Kuba může ujet taxíkem 5+1=6 mil.

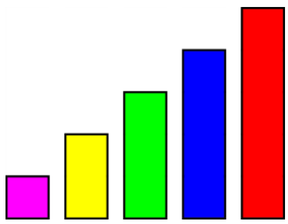
**Úloha 04. Vystřihovánka**

*Pepík si vystřihl několik pásků, které vidíš na obrázku vlevo. Teď si z nich skládá různé útvary. Který z útvarů na obrázku vpravo nemůže poskládat z těchto pásků?*

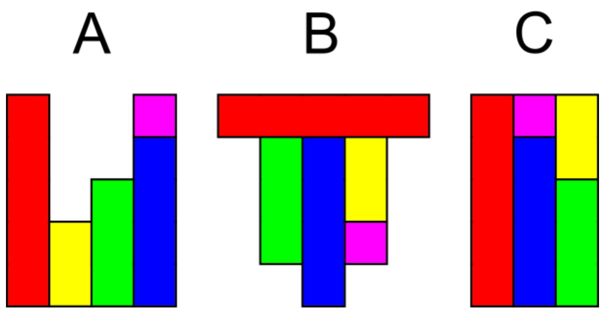



*a) A* *b) B* *c) C* *d) D*

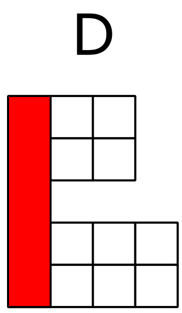
<u>Výsledek:</u> d) D
<u>Řešení:</u> Aby bylo rozdělení útvarů na jednotlivé pásky lépe vidět, tak si zabarvíme pásky tak, jako na tomto obrázku:



Lehce najdeme způsob, jak poskládat z pásků útvary A, B a C. Například takto:



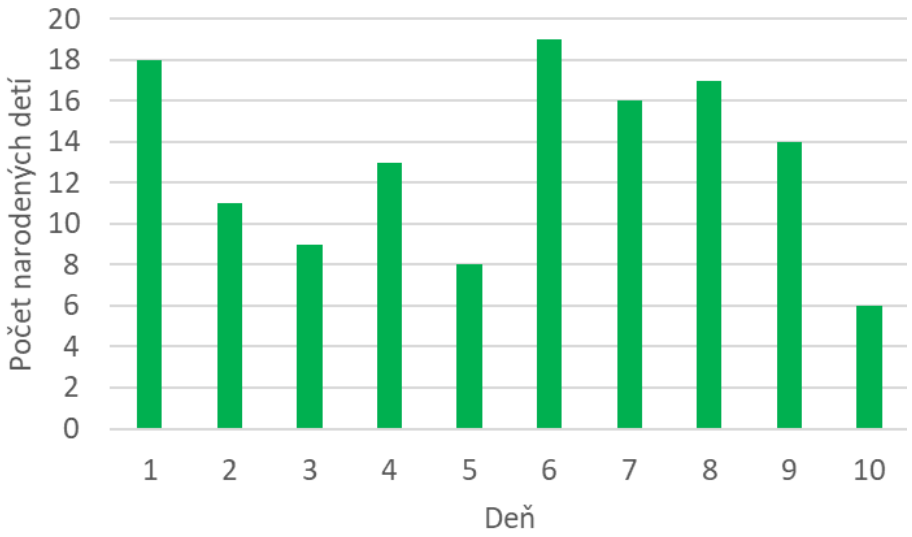

Útvar D ale z pásků poskládat neumíme. Máme totiž jen jednu možnost, jak umístit nejdelší, červený pásek. Potom ale nebudeme mít kam umístit druhý nejdelší, modrý pásek.




Proto neumíme z pásků poskládat jen útvar d) D.

**Úloha 05. Nový život**

*Graf na obrázku ukazuje, kolik dětí se v jednom městě narodilo za prvních deset dní v květnu. Dominika si zapamatovala počet narozených dětí v dni, kdy se jich narodilo nejvíc. Katka si zase zapamatovala počet narozených dětí v dni, kdy se jich narodilo nejméně. O kolik větší číslo si zapamatovala Dominika?*




Výsledek: 13
Řešení: Z grafu lehce zjistíme, že nejvíc dětí se narodilo 6. května, kdy se jich narodilo 19. Podobně zjistíme, že nejméně dětí se narodilo 10. května, kdy se jich narodilo jen 6. Dominika si tak zamapatovala číslo 19 a Katka číslo 6. Dominika si proto zapamatovala číslo, které bylo o 19-6=13 větší.

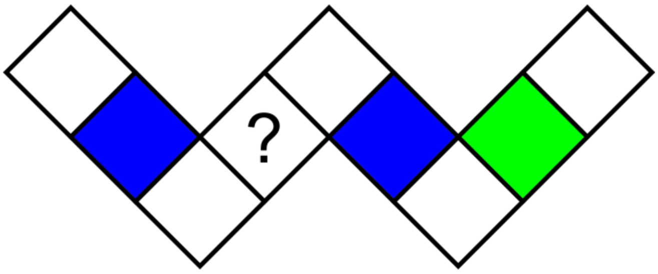
**Úloha 06. Vidíme se příště**

*Rok 2020 je speciální. První dvojčíslí tohoto roku je stejné jako poslední dvojčíslí tohoto roku. Kolik nejméně roků si musíme počkat na další takový rok (jiný než rok 2020), že jeho první dvojčíslí bude stejné jako jeho poslední dvojčíslí?*

Výsledek: 101
Řešení: Pro první dvojčíslí 20 máme jen jeden rok, který má poslední dvojčíslí 20 - a to 2020. Proto se první dvojčíslí musí změnit. Nejbližší větší dvojčíslí, které můžeme mít, je dvojčíslí 21. Pro první i poslední dvojčíslí 21 máme rok 2121. Ten je tedy nejbližším rokem, který má stejné první i poslední dvojčíslí. Potřebujeme si na něj počkat 2121-2020=101 let.

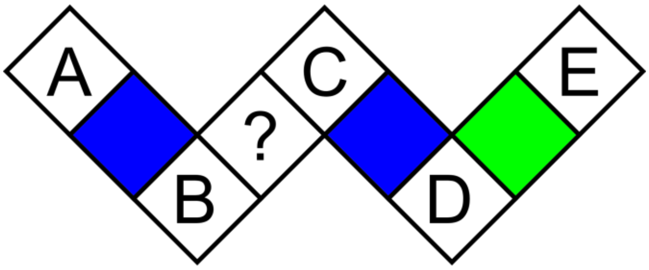
**Úloha 07. Barevné čtverečky**

*Laura si nakreslila několik čtverečků. Začala je vybarvovat červenou, modrou a zelenou barvou. Některé čtverečky už vybarvila tak, jak vidíš na obrázku. Zbylé čtverečky chce vybarvit tak, aby každá trojice čtverečků, které jsou v řadě, obsahovala čtvereček každé z těchto tří barev. Jakou barvu bude mít čtvereček s otazníkem?*

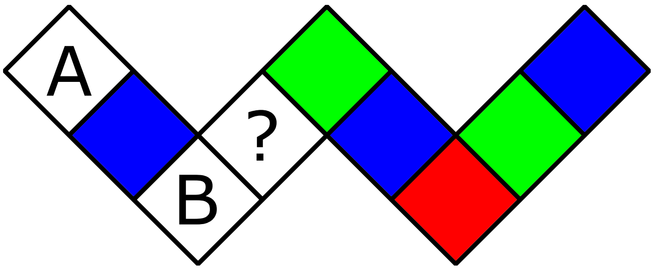



*a) červenou* *b) zelenou* *c) modrou* *d) nelze určit*

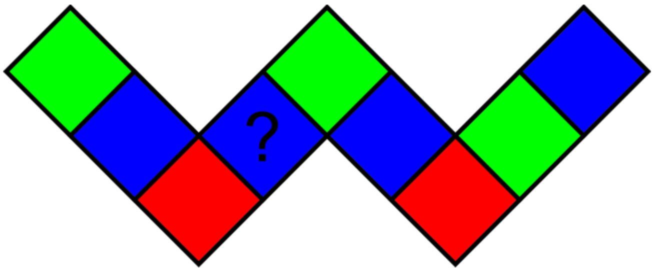
Výsledek: c) modrou
Řešení: Označme si jednotlivé čtverečky tak, jako na tomto obrázku:




Podívejme se nyní na čtvereček označený písmenem D. Nachází se v řadě se zeleným čtverečkem a i v řadě s modrým čtverečkem. Proto nemůže mít žádnou z těchto barev (jinak by v některé řadě chyběla některá z barev), a tak musí být červený. Potom lehce doplníme, že čtvereček E musí být modrý a čtvereček C zelený. Dostaneme se to tohoto stavu:



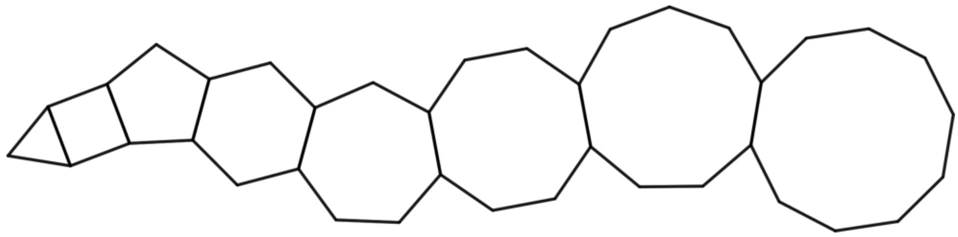

Nyní se zaměřme na čtvereček B. Nachází se v řadě se zeleným čtverečkem i v řadě s modrým čtverečkem. Takže musí být červený. Tím pádem už umíme jednoduše doplnit všechny ostatní čtverečky:




To znamená, že čtvereček označený otazníkem bude c) modrý.

**Úloha 08. Počet stran**

*Tomáš se učí kreslit pravidelné mnohoúhelníky. Nakreslil si rovnostranný trojúhelník, k němu přikreslil čtverec, k němu pravidelný pětiúhelník, k němu pravidelný šestiúhelník, a tak dále. Skončil tím, že k pravidelnému devítiúhelníku přikreslil pravidelný desetiúhelník. Dostal útvar jako na obrázku. Kolik stran měl tento útvar?*



Výsledek: 38
Řešení: Podívejme se, kolik stran přidáme připojením jednoho mnohoúhelníku. Jednu stranu mnohoúhelníku a jednu stranu už vzniklého útvaru musíme použít na spojení těchto dvou útvarů. Jinak ale přidáme všechny ostatní strany mnohoúhelníku. Přidáním jednoho mnohoúhelníku tak zvýšíme počet stran výsledného útvaru o počet stran přidávaného mnohoúhelníku zmenšený o dva. Postupně tak přidáme 2, 3, 4, a tak dále až 8 stran. Začínáme s trojúhelníkem, který má 3 strany, takže výsledný útvar bude mít 3+2+3+4+5+6+7+8=38 stran.

**Úloha 09. Běžecká rozcvička**

*Luboš chodí běhávat k stromořadí, kde je vysazených dvanáct topolů v jedné dlouhé řadě. Jsou vysazené tak, že vzdálenost mezi každými dvěma sousedními topoly je stejná. Lubošovi trvá 45 sekund než zaběhne od prvního topolu k čtvrtému. Kolik sekund mu trvá zaběhnout od prvního topolu k poslednímu?*

Výsledek: 165
Řešení: Když Luboš zaběhne od prvního stromu k čtvrtému, tak zaběhne 3 úseky mezi jednotlivými stromy. Zaběhnout jeden úsek mu proto trvá 45:3=15 sekund. Na to, aby zaběhl od prvního stromu k dvanáctému, musí uběhnout 11 těchto úseků. To mu bude trvat 11·15=165 sekund.

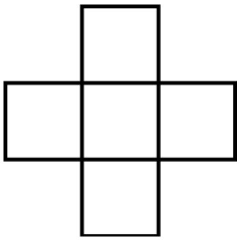
**Úloha 10. Advent**

*Pepa vyráběl adventní ozdobu. Vzal si červený papír a pětkrát ho přeložil na polovinu. Takto poskládaný papír potom v středu propíchnul a papír rozložil. Kolik děr bylo v papíru?*

Výsledek: 32
Řešení: Pokaždé, když Pepa přeloží papír, tak se počet vrstev papíru zdvojnásobí. Na začátku ma papír jen jednu vrstvu. Po prvním přeložení jich bude 2·1=2. Po druhém přeložení bude mít papír 2·2=4 vrstvy, po třetím 2·4=8, po čtvrtém 2·8=16 a po pátém přeložení bude mít papír 2·16=32 vrstev. Když takto poskládaný papír Pepa propíchne, tak propíchne každou vrstvu právě jednou. Na papíru tak vznikne přesně tolik děr, kolik bylo vrstev po přeložení, tedy 32.

**Úloha 11. Součtový kříž**

*Martin vepsal do každého čtverečku na obrázku čísla 1, 2, 3, 4, 5, každé právě jednou. Součet tří čísel v středním řádku byl stejný jako součet tří čísel v středním sloupci. Jakou největší hodnotu mohl mít tento součet?*



<u>Výsledek:</u> 10
<u>Řešení:</u> Číslo, které se nachází v políčku v středu se započítává do obou součtů. Pokud chceme, aby byly oba součty co největší, chceme, aby se v obou součtech započítávalo co největší číslo. Tím je číslo 5, které proto umístíme do středního políčka. Zbylá čísla musíme umístit tak, aby byly oba součty stejné. Proto potřebujeme čísla 1, 2, 3 a 4 rozdělit do dvou dvojic se stejným součtem. Jednoduše je rozdělíme do dvojic 1+4 a 2+3. Každá z dvojic budou součástí jednoho ze součtů. Hledaný součet proto bude 1+4+5=2+3+5=10.

**Úloha 12. Pravdomluvné pondělky**

*Dominika se rozhodla, že v pondělí, čtvrtek a sobotu bude mluvit jen pravdu. Ostatní dny v týdnu bude jen lhát. Jednoho dne řekla: „Zítra budu mluvit pravdu." Který den v týdnu to řekla?*

<u>Výsledek:</u> úterý
<u>Řešení:</u> Všimněme si, co o Dominice vypovídá, že řekla „Zítra budu mluvit pravdu". Pokud ten den mluví pravdu, tak i následující den mluví pravdu. Pokud ten den lže, tak i následující den lže. Tuto větu tak může říct jen tehdy, pokud má dva po sobě jdoucí dny, v průběhu kterých buď oba mluví pravdu, nebo oba lže. Takové dny jsou ale u Dominiky jen úterý a středa, v průběhu kterých lže. Dominika proto mohla tuto větu říct jen v úterý.

**Úloha 13. Hmyzožrout**

*Fedor se učil sčítat. Napsal si úlohu na sčítání a správně ji vypočítal. Vtom mu ale do pokoje vešel jeho mladší bratr a každou cifru nahradil nějakým písmenem. Stejné cifry nahradil stejnými písmeny, různé cifry různými písmeny. Když se na to Fedor podíval, uviděl to, co vidíš na obrázku. Chtěl získat svoji původní úlohu, ale už si ji nepamatoval. Věděl, že písmeno J zastupuje cifru 7. Také si pamatoval, že písmeno M zastupuje nějakou sudou cifru. Jakou cifru zastupuje písmeno E?*

$$\begin{array}{r} \mathrm{J\ E\ M} \\ +\ \mathrm{J\ E\ M} \\ \hline \mathrm{H\ M\ Y\ Z} \end{array}$$

<u>Výsledek:</u> 3
<u>Řešení:</u> Napišme si do úlohy cifru 7 místo písmena J:

$$\begin{array}{r} 7\ E\ M \\ +\ 7\ E\ M \\ \hline H\ M\ Y\ Z \end{array}$$

Hned vidíme, že písmeno M může zastupovat buď cifru 4, nebo cifru 5 - podle toho, v předcházejícím sčítání došlo k přechodu přes desítku. Jenže M má zastupovat nějakou sudou cifru, takže to musí být cifra 4. Nyní lehce doplníme, že písmeno H zastupuje cifru 1 a písmeno Z cifru 4+4=8. Napišme si tyto informace do Fedorovy úlohy:

$$\begin{array}{r} 7\ E\ 4 \\ +\ 7\ E\ 4 \\ \hline 1\ 4\ Y\ 8 \end{array}$$

Zůstává nám poslední část součtu. V ní nemáme žádnou desítku přenesenou z předešlého sčítání a ani nemáme přenést desítku do dalšího sčítání. Součet E+E proto musí být menší než 10, což znamená, že E musí být menší než 5. Máme tak 5 možností, co může být E: 0, 1, 2, 3 a 4. Cifry 1 a 4 můžeme vyloučit, protože ty už jsou použité. Dále nemůžeme použít cifru 0, protože E a Y by zastupovali stejné cifry, což nemůžou. Také nemůžeme použít za E cifru 2, protože Y by musel být 4, a cifra 4 už je použitá. Jediná zbývající možnost je zvolit za E cifru 3 a dostat tento součet:

$$\begin{array}{r} 7\ 3\ 4 \\ +\ 7\ 3\ 4 \\ \hline 1\ 4\ 6\ 8 \end{array}$$

To znamená, že písmeno E zastupuje cifru 3.

---

**Úloha 14. Nudná škola**

*Kuba se nudil na videopřednáškách, a tak si na papír vypsal všechny dělitele čísla 72. Potom si červenou podtrhl všechna prvočísla a modrou všechny násobky čísla 3. Jaký byl součet všech čísel, která nebyla podtrhnuta žádnou z barev?*

Výsledek: 13
Řešení: Vypišme si všechny dělitele čísla 72. To jsou 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 a 72. Kuba podtrhne červenou čísla 2 a 3. Modrou zase podtrhne čísla 3, 6, 9, 12, 18, 24, 36 a 72. Nepodtrhnutá tak zůstanou jen čísla 1, 4 a 8. Součet čísel, která nebyla podtrhnuta žádnou z barev, je proto 1+4+8=13.

---

**Úloha 15. Digitální součet**

*Erik pozoruje svoje digitální hodinky, které ukazují čas od 00:00 do 23:59. Kolikrát za den nastane situace, že součet cifer, které hodiny ukazují, je 23?*

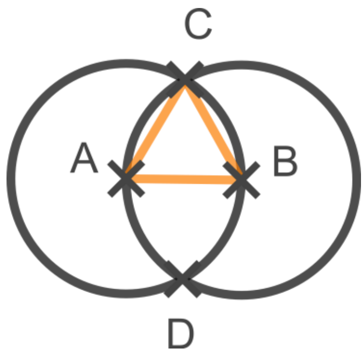
Výsledek: 4
Řešení: Zjistěme nejdřív, jaký je největší součet cifer, který může na hodinách nastat. Na místě hodin můžeme mít některé z čísel 0 až 23. Největší součet cifer na tomto místě je proto 1+9=10. Na místě minut můžeme zase mít některé z čísel 0 až 59, což dává největší součet cifer 5+9=14. Největší součet cifer, který v průběhu dne nastane je tak 10+14=24. To je o jedna více než součet, na který se nás ptá zadání. Takového součtu proto dosáhneme buď tím, že zmenšíme součet cifer na místě hodin o 1, nebo tím, že zmenšíme součet cifer na místě minut o 1.
Pokud zmenšíme součet cifer na místě hodin, bude tento součet 10-1=9. Toho umíme dosáhnout jen dvěma způsoby - jako 09 a jako 18. Dostáváme tak dva vyhovující časy 09:59 a 18:59.
Pokud zmenšíme součet na místě minut na 14-1=13, tak znova budeme mít jen dvě možnosti: 49 a 58. Tím získáme další dva vyhovující časy 19:49 a 19:58.
Vyhovují tedy jen časy 09:59, 18:59, 19:49 a 19:58, takže daná situace nastane 4krát za den.

---

**Úloha 16. Dvě kružnice**

*Péťa si nakreslil na papír dvě kružnice se středy v bodech A a B. Bod B ležel na kružnici se středem v bodě A a bod A ležel na kružnici se středem v bodě B. Body, v kterých se tyto dvě kružnice protínaly, nazval C a D. Jakou velikost v stupních měl úhel ACB?*

Výsledek: 60
Řešení: Nakreslíme si obrázek podle zadání.




Bod B leží na kružnici se středem A, takže úsečka AB tvoří poloměr této kružnice. Zároveň leží bod A na kružnici se středem v bodě B, takže úsečka AB tvoří poloměr i této kružnice. To znamená, že poloměry obou kružnic jsou stejné a mají velikost |AB|. Když se nyní podíváme na trojúhelník ABC, tak zjistíme, že všechny jeho tři strany jsou stejně dlouhé - dvě z nich jsou totiž tvořené poloměry jednotlivých kružnic (které mají stejnou délku jako úsečka AB) a třetí z nich je samotná strana AB. Proto je trojúhelník ABC rovnostranný. Všechny úhly rovnostranného trojúhelníku ale mají velikost 60°, a tak má i úhel ACB velikost 60°.

**Úloha 17. Plot twist**

*Marcel a Sabina natírají plot. Pokud by Sabina natírala 18 dní, Marcel by potřeboval ještě 9 dní na to, aby natírání dokončil. Sabina ale natírala jen 6 dní, a tak Marcel potřeboval 13 dní na dokončení natírání. Za kolik dní by Sabina natřela plot, pokud by ho natírala sama?*

Výsledek: 45
Řešení: Tím, že Sabina natírala plot o 18-6=12 dní méně, tak přidala Marcelovi 13-9=4 dny natírání. To znamená, že to, co Sabina natře za 12 dní, natře Marcel za 4 dny. Po vydělení čtyřmi zjistíme, že to, co natře Sabina za 3 dny, natře Marcel za 1 den. Pokud by Sabina natírala 18 dní, tak by jí zbývalo ještě 9 dní Marcelovy práce, kterou ona udělá za 3·9=27 dní. Dohromady tak Sabina potřebuje 18+27=45 dní na to, aby plot natřela sama.

**Úloha 18. Attomat?**

*Lucka psala ve škole test, v kterém měla odpovědět na 20 otázek. Za správnou odpověď dostala 5 bodů a za nesprávnou odpověď 0 bodů. Pokud se rozhodla na otázku neodpovědět, dostala za ni 1 bod. Lucka zjistila, jaké je nejmenší přirozené číslo, které označuje počet bodů, který v tomto testu nejde dosáhnout. Jakou hodnotu mělo toto číslo?*

Výsledek: 89
Řešení: Všimněme si, že všechny počty bodů menší než 85 umíme poměrně lehce poskládat z počtu bodů, které můžeme dostat. Stačí, abychom dostali pět bodů 0 až 16krát a jeden bod 0 až 4krát. Zbylé otázky ať jsou za nula bodů. Například 54 bodů bychom dostali pomocí 10 otázek za pět bodů, 4 otázky za jeden bod a 6 otázek za nula bodů. Také umíme lehce vyskládat počty bodů 85 až 88 - stačí použít 17krát úlohu za 5 bodů a 0 a 3krát úlohu za 1 bod. Pokud dostaneme 4krát jeden bod, tak potřebujeme dostat 17krát pět bodů. Zjevně se nevyplatí použít méně úloh za pět bodů a víc úloh za jeden bod. Takže 89 bodů doopravdy neumíme dosáhnout. Takže číslo, které Lucka zjistila, bylo 89.

**Úloha 19. Nejblížší ke všem**

*Majo si na číselné ose vyznačil 11 bodů. Vyznačil si body, které označovaly čísla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 a 1024. Teď je zvědavý, který bod na číselné ose má nejmenší součet vzdáleností od těchto 11 bodů. Jaké číslo má tento bod?*

Výsledek: 32
Řešení: Podívejme se, co se děje se součtem vzdáleností, když se pohybujeme po číselné ose. Pokud máme vpravo více vyznačených bodů než vlevo, tak umíme součet vzdáleností snížit tím, že se posuneme doprava. To proto, že všechny vzdálenosti se změní o stejnou hodnotu. Ale těch, které se zmenší (vzdáleností od bodů vpravo), bude více. Takže nejmenší součet vzdáleností určitě nebude v takovém bodě, který má vlevo více vyznačených bodů než vpravo. Nejmenší součet vzdáleností od vyznačených bodů tak musí být v takovém bodě, který má vlevo od sebe stejně vyznačených bodů jako vpravo od sebe. Protože bodů je lichý počet, tak toto může nastat jen v některém z těchto bodů. Nastane to v tom vyznačeném bodu, který má vlevo od sebe 5 bodů a i vpravo od sebe 5 bodů. Tímto bodem je bod s číslem 32. Takže bod, v kterém bude součet vzdáleností nejmenší, má číslo 32.

**Úloha 20. Nezaměnitelné kódy**

*V obchodě je každý druh pečiva zakódovaný 7místným kódem, který tvoří jen písmena A a B. Každé dva kódy se liší na aspoň třech místech. Například kódy ABBBABA a AAABAAB se liší na čtyřech místech (druhém, třetím, šestém a sedmém). Kolik nejvíce druhů pečiva můžou mít v obchodě?*

Výsledek: 16
Řešení: Po chvíli hledání můžeme najít těchto 16 kódů, které splňují podmínky ze zadání:

| | |
|---|---|
| AAAAAAA | BBBBBBB |
| BBABAAA | AABABBB |
| ABBABAA | BAABABB |
| AABBABA | BBAABAB |
| AAABBAB | BBBAABA |
| BAAABBA | ABBBAAB |
| ABAAABB | BABBBAA |
| BABAAAB | ABABBBA |

Dále ukážeme, že více kódů dostat nemůžeme. Předpokládejme, že jsme vybrali nějaké kódy, které chceme použít na označení pečiva. Každý vybraný kód si napíšeme na vrch samostatného papíru a vypíšeme si pod něj kódy, které se od něho liší na přesně jednom místě. Všimněme si, že žádný kód nemůže být na více než jenom papíru. Podívejme se totiž, co by se stalo, kdyby takový společný kód existoval. Potom bychom uměli přejít jednou změnou z kódu na vrchu jednoho papíru na tento společný kód a z něho jednou změnou na kód na vrchu jiného papíru. Takže bychom přešli mezi kódy na vrchu papírů dvěma změnami, avšak zadání nám říká, že na to máme použít aspoň tři změny.
Víme už, že z každého papíru můžeme použít nejvíc jeden kód, zůstává nám ještě zjistit, na kolik nejvíc papírů umíme napsat všechny kódy. Všech kódů je 2·2·2·2·2·2·2=128, protože se na každém místě můžeme rozhodnout, zda použijeme znak A, nebo B. Avšak na každém papíru máme 8 kódů - jeden na vrchu a pod ním sedm takových, které z něho vznikly jednou změnou. Tedy i kdyby byl každý kód na přesně jednom papíru, použili bychom nejvíc 128:8=16 papírů. Kódy tedy umíme rozdělit na nejvíc 16 papírů, tedy na označení pečiva můžeme použít nejvíc 16 kódů.
Na začátku se nám podařilo najít 16 vyhovujících kódů a nyní už víme, že jich víc nemůže existovat. Máme tedy nejvíc 16 kódů, které můžou být použité na označení pečiva, a tedy nejvíc 16 druhů pečiva.