



p - mat

Attomat

21.05.2020

Vzorové riešenia
Kategórie 5, 6, Príma
Slovenská verzia

Úloha 01. Veselá úloha

Palo a Katka si vymysleli veselé čísla. Veselé číslo má iba párne cifry. Palo si napísal najmenšie dvojčiferné veselé číslo a Katka si napísala najmenšie štvorciferné veselé číslo. Aký je súčet Palovho a Katkinho čísla?

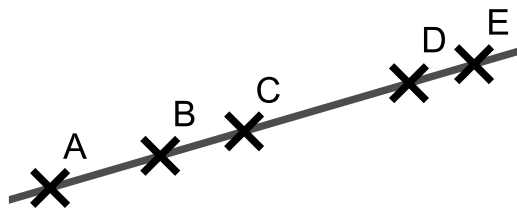
Poznámka: Cifra 0 je párna.

Výsledok: 2020

Riešenie: Aby si Palo napísal nejaké dvojčiferné číslo, muselo mať toto číslo na mieste desiatok inú cifru ako cifru 0. Zároveň hľadáme najmenšie také číslo, a tak muselo mať na mieste desiatok najmenšiu párnou cifru, ktorá je rôzna od nuly. A tou je cifra 2. Na miesto jednotiek už môžeme dať najmenšiu párnou cifru - 0. Palo si preto napísal číslo 20. Katkino číslo muselo tiež začínať cifrou 2, za ktorou museli nasledovať iba cifry 0. Katka si tak napísala číslo 2000. Súčet Palovho a Katkinho čísla je preto $20+2000=2020$.

Úloha 02. Priama forma zábavy

Patrik si na priamku nakreslil 5 bodov v poradí A, B, C, D, E. Nakreslil ich tak, aby platilo $|AC|=12$ cm, $|BD|=15$ cm, $|CE|=19$ cm, $|AD|=20$ cm. Aká bola dĺžka úsečky AE v centimetroch?



Výsledok: 31

Riešenie: Bod C leží na úsečke AE, ktorej dĺžku máme vypočítať. Preto vieme napísať $|AE|=|AC|+|CE|$. Dĺžky úsečiek AC a CE ale vieme. Preto má úsečka AE dĺžku $12+19=31$ centimetrov.

Úloha 03. Cesta taxíkom

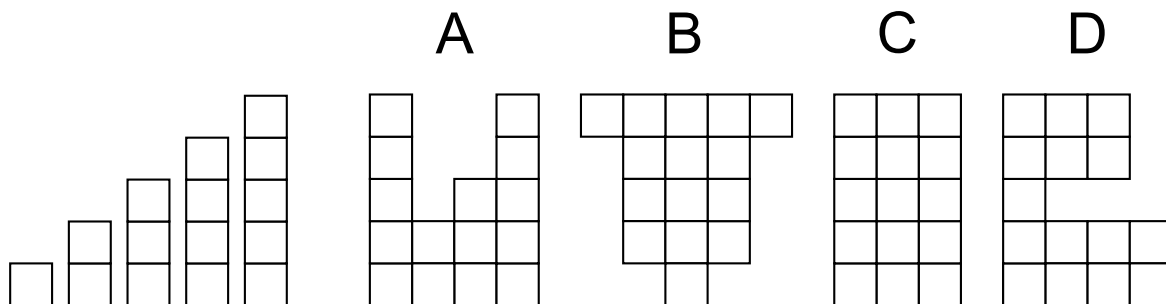
Taxikári v Chicagu si pýtajú 3 doláre za prvú prejdenú míľu a potom 1 dolár za každú ďalšiu. Koľko najviac míľ môže Kubo prejsť taxíkom, ak má 10 dolárov a zo slušnosti chce nechať taxikárovi 2 doláre ako prepitné?

Výsledok: 6

Riešenie: Odčítajme od Kubových 10 dolárov 2 doláre, ktoré dá taxikárovi ako prepitné, a 3 doláre za prvú prejdenú míľu. Dostaneme tak, že Kubo má $10-2-3=5$ dolárov na to, aby zaplatil za míle za jeden dolár. Za tieto peniaze dokáže prejsť 5 míľ. Spolu s prvou míľou za 3 doláre tak Kubo môže prejsť taxíkom $5+1=6$ míľ.

Úloha 04. Vystrihovačka

Jožko si vystrihol niekoľko pásov, ktoré vidíš na obrázku vľavo. Teraz si z nich skladá rôzne útvary. Ktorý z útvarov na obrázkoch vpravo nemôže poskladať z týchto pásov?



a) A

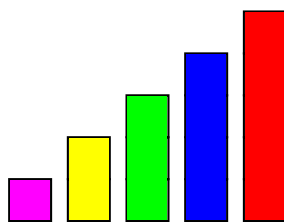
b) B

c) C

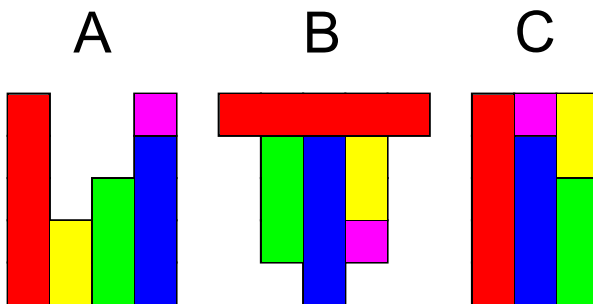
d) D

Výsledok: d) D

Riešenie: Aby bolo rozdelenie útvarov na jednotlivé pásiky lepšie vidno, tak si zafarbime pásiky tak ako na tomto obrázku:

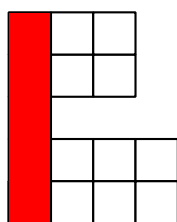


Ľahko nájdeme spôsob, ako poskladať z pásov útvary A, B a C. Napríklad takto:



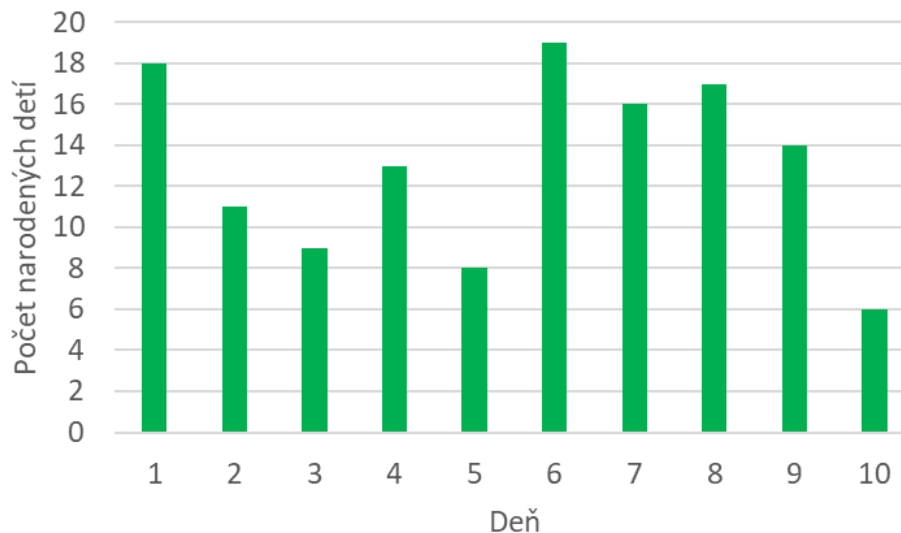
Útvar D ale z pásov poskladať nevieme. Máme totiž len jednu možnosť, ako umiestniť najdlhší, červený pásik. Potom ale nebudeme mať kam umiestniť druhý najdlhší, modrý pásik. Preto nevieme z pásov poskladať iba útvar d) D.

D



Úloha 05. Nový život

Graf na obrázku ukazuje, koľko detí sa v jednom meste narodilo za prvých desať dní mesiaca máj. Dominika si zapamätala počet narodených detí v deň, kedy sa ich narodilo najviac. Katka si zapamätala počet narodených detí v deň, kedy sa ich narodilo najmenej. O koľko väčšie číslo si zapamätala Dominika?



Výsledok: 13

Riešenie: Z grafu ľahko zistíme, že najviac detí sa narodilo 6. mája, kedy sa ich narodilo 19. Podobne zistíme, že najmenej detí sa narodilo 10. mája, kedy sa ich narodilo iba 6. Dominika si tak zapamätala číslo 19 a Katka číslo 6. Dominika si preto zapamätala číslo, ktoré bolo o $19-6=13$ väčšie.

Úloha 06. Vidíme sa nabudúce

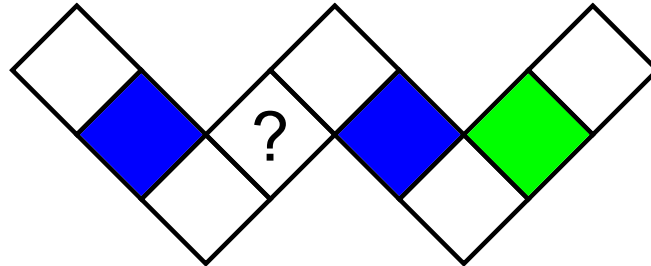
Rok 2020 je špeciálny. Prvé dvojčísle tohto roku je rovnaké ako posledné dvojčísle tohto roku. Koľko najmenej rokov si musíme počkať na ďalší taký rok (iný ako rok 2020), že jeho prvé dvojčísle bude rovnaké ako jeho posledné dvojčísle?

Výsledok: 101

Riešenie: Pre prvé dvojčísle 20 máme iba jeden rok, ktorý má aj posledné dvojčísle 20 - a to 2020. Preto sa prvé dvojčísle musí zmeniť. Najbližšie väčšie dvojčísle, ktoré môžeme mať, je dvojčísle 21. Pre prvé aj posledné dvojčísle 21 máme rok 2121. Ten je tak najbližší rok, ktorý má rovnaké prvé a posledné dvojčísle. Potrebujeme si naň počkať $2121-2020=101$ rokov.

Úloha 07. Farebné štvorčeky

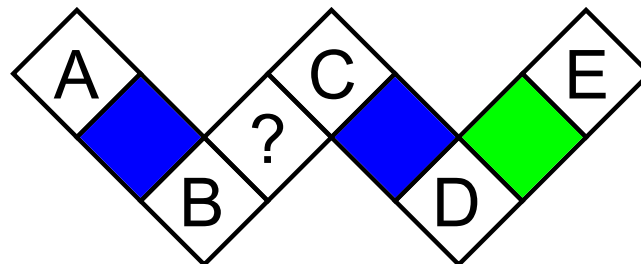
Laura si nakreslila niekoľko štvorčekov. Začala ich vyfarbovať červenou, modrou a zelenou farbou. Niektoré štvorčeky už vyfarbila tak, ako vidíš na obrázku. Zvyšné štvorčeky chce vyfarbiť tak, aby každá trojica štvorčekov, ktoré ležia v rade, obsahovala štvorček každej z týchto troch farieb. Akú farbu bude mať štvorček s otáznikom?



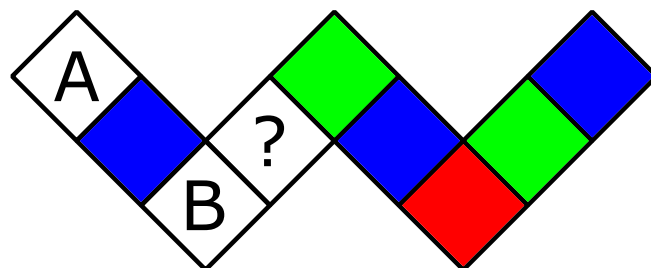
- a) červenú b) zelenú c) modrú d) nedá sa určiť

Výsledok: c) modrú

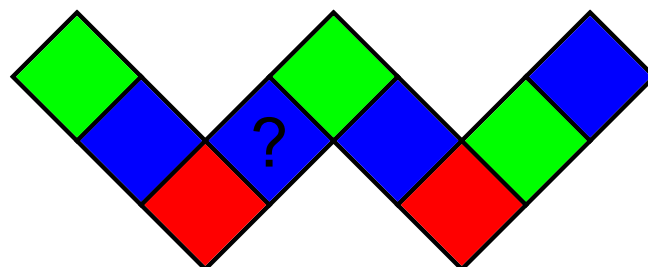
Riešenie: Označme si jednotlivé štvorčeky tak ako na tomto obrázku:



Pozrime sa teraz na štvorček označený písmenom D. Nachádza sa v rade so zeleným štvorčekom a aj v rade s modrým štvorčekom. Preto nemôže mať žiadnu z týchto farieb (ináč by v niektorom rade chýbala niektorá z farieb), a tak musí byť červený. Potom ľahko doplníme, že štvorček E musí byť modrý a štvorček C zelený. Dostaneme sa do takéhoto stavu:



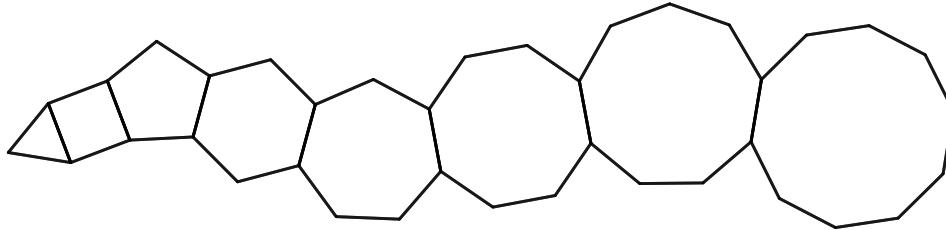
Teraz sa zamerajme na štvorček B. Nachádza sa v rade so zeleným štvorčekom aj v rade s modrým štvorčekom. Takže musí byť červený. Tým pádom už vieme jednoducho doplniť všetky ostatné štvorčeky:



To znamená, že štvorček označený otáznikom bude c) modrý.

Úloha 08. Množstvo strán

Tomáš sa učí kresliť pravidelné mnohoúhelníky. Nakreslil si rovnostranný trojuholník, k nemu prikreslil štvorec, k nemu pravidelný päťuholník, k nemu pravidelný šesťuholník a tak ďalej. Skončil tým, že k pravidelnému deväťuholníku prikreslil pravidelný desaťuholník. Dostal útvar ako na obrázku. Koľko strán mal tento útvar?

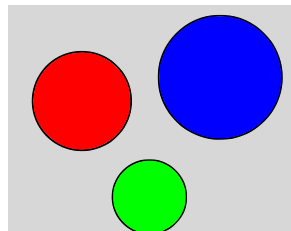


Výsledok: 38

Riešenie: Pozrime sa, koľko strán pridávame pripojením jedného mnohoúhelníka. Jednu stranu mnohoúhelníka a jednu stranu už vzniknutého útvaru musíme použiť na spojenie týchto dvoch útvarov. Ináč ale pridávame všetky ostatné strany mnohoúhelníka. Pridaním jedného mnohoúhelníka tak zvýšime počet strán výsledného útvaru o počet strán pridávaného mnohoúhelníka zmenšený o dva. Postupne tak pridávame 2, 3, 4, a tak ďalej až 8 strán. Začíname s trojuholníkom, ktorý má 3 strany, takže výsledný útvar bude mať $3+2+3+4+5+6+7+8=38$ strán.

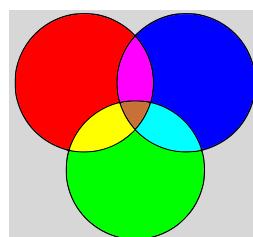
Úloha 09. Deliace kružnice

Peťo si nakreslil na papier tri kružnice. Tieto rozdelili papier na niekoľko častí. Peťo každú z nich (vrátane tej, ktorá neležala v žiadnej z kružníc) vyfarbil inou farbou. Napríklad ak by si nakreslil kružnice ako na obrázku, tak by použil 4 rôzne farby - červenú, modrú, zelenú a šedú. Koľko najviac rôznych farieb mohol Peťo použiť?



Výsledok: 8

Riešenie: Postupne pridávajme jednotlivé kružnice. Po nakreslení prvej kružnice máme papier rozdelený na dve časti. Pridaním druhej môžeme každú z týchto častí rozdeliť touto kružnicou na dve. Dostaneme tak spolu najviac $2 \cdot 2 = 4$ častí. Treťou kružnicou znova môžeme rozdeliť každú z týchto častí na dve a dostať tak spolu najviac $2 \cdot 4 = 8$ častí. Najviac častí, ktoré môžeme dostať je tak 8 ako napríklad na tomto obrázku:



Peťo tak mohol použiť najviac 8 rôznych farieb.

Úloha 10. Bežecká rozcvička

Ľubo chodíeva behávať k stromoradiu, kde je vysadených dvanásť topoľov v jednom dlhom rade. Sú vysadené tak, že vzdialenosť medzi každými dvoma susednými topoľmi je rovnaká. Ľubovi trvá 45 sekúnd, kým zabehne od prvého topoľa k štvrtému. Koľko sekúnd mu trvá zabehnúť od prvého topoľa k poslednému?

Výsledok: 165

Riešenie: Keď Ľubo zabehne od prvého stromu k štvrtému, tak zabehne 3 úseky medzi jednotlivými stromami. Zabehnúť jeden taký úsek mu preto trvá $45:3=15$ sekúnd. Na to, aby zabehol od prvého stromu k dvanástemu, musí zabehnúť 11 takýchto úsekov. To mu bude trvať $11 \cdot 15=165$ sekúnd.

Úloha 11. Advent

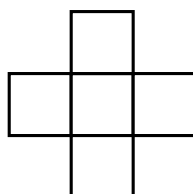
Jožko robil adventnú ozdobu. Zobral červený papier a päťkrát ho preložil na polovicu. Takto poskladaný papier potom v strede prepichol a papier rozložil. Koľko dier na ňom bolo?

Výsledok: 32

Riešenie: Zakaždým, keď Jožko preloží papier, tak sa počet vrstiev papiera zdvojnásobí. Na začiatku má papier iba jednu vrstvu. Po prvom preložení ich bude $2 \cdot 1=2$. Po druhom preložení bude mať papier $2 \cdot 2=4$ vrstvy, po treťom ich bude $2 \cdot 4=8$, po štvrtom $2 \cdot 8=16$ a napokon po piatom preložení bude mať papier $2 \cdot 16=32$ vrstiev. Keď takto poskladaný papier Jožko prepichne, tak prepichne každú vrstvu práve raz. Na papieri tak vznikne presne toľko dier, koľko bolo vrstiev po preložení, čiže 32.

Úloha 12. Súčtový kríž

Martin vpísal do každého štvorčeka na obrázku čísla 1, 2, 3, 4, 5, každé práve raz. Súčet troch čísel v strednom riadku bol rovnaký ako súčet troch čísel v strednom stĺpci. Aký najväčší mohol tento súčet byť?



Výsledok: 10

Riešenie: Číslo, ktoré sa nachádza v políčku v strede, sa započítava do oboch súčtov. Keď chceme, aby boli oba súčty čo najväčšie, chceme, aby sa do oboch súčtov započítavalo to najväčšie číslo. Ním je číslo 5, ktoré preto umiestnime do stredného políčka. Zvyšné čísla musíme umiestniť tak, aby boli oba súčty rovnaké. Preto potrebujeme čísla 1, 2, 3 a 4 rozdeliť na dve dvojice s rovnakým súčtom. To sa jednoducho rozdelí na $1+4$ a $2+3$. Každá z dvojíc bude súčasťou jedného zo súčtov. Hľadaný súčet preto bude $1+4+5=2+3+5=10$.

Úloha 13. Pravdovravné pondelky

Dominika sa rozhodla, že v pondelok, štvrtok a sobotu bude hovoriť iba pravdu. Ostatné dni v týždni bude iba klamať. Jedného dňa povedala: „Zajtra budem hovoriť pravdu.“ V ktorý deň v týždni to povedala?

Výsledok: utorok

Riešenie: Všimnime si, čo o Dominike hovorí, že povedala „Zajtra budem hovoriť pravdu“. Ak v ten deň hovorí pravdu, tak aj nasledujúci deň hovorí pravdu. Ak v ten deň klame, tak klame aj v nasledujúcom dni. Túto vetu tak môže povedať iba vtedy, ak má dva po sebe idúce dni, počas ktorých buď v oboch hovorí pravdu, alebo v oboch klame. Takými dňami sú ale u Dominiky iba utorok a streda, počas ktorých klame. Dominika preto mohla túto vetu povedať jedine v utorok.

Úloha 14. Hmyzožrút

Fedor sa učil sčítovať. Napísal si úlohu na sčítovanie a správne ju vypočítal. Vtom mu ale do izby vošiel jeho mladší brat a každú cifru nahradil nejakým písmenkom. Rovnaké cifry nahradil rovnakými písmenkami, rôzne cifry rôznymi písmenkami. Keď sa na to Fedor pozrel, uvidel to, čo vidíš na obrázku. Chcel dostať svoju pôvodnú úlohu, ale už si ju nepamätal. Vedel, že písmeno J zastupuje cifru 7. Taktiež si pamätal, že písmeno M zastupuje nejakú párnú cifru. Akú cifru zastupuje písmeno E?

$$\begin{array}{r}
 J E M \\
 + J E M \\
 \hline
 H M Y Z
 \end{array}$$

Výsledok: 3

Riešenie: Napíšme si do úlohy cifru 7 namiesto písmena J:

$$\begin{array}{r}
 7 E M \\
 + 7 E M \\
 \hline
 H M Y Z
 \end{array}$$

Hneď vidíme, že písmeno M môže zastupovať buď cifru 4, alebo cifru 5 - podľa toho, či v predchádzajúcom sčítovaní došlo k prechodu cez desiatku. Lenže M má zastupovať nejakú párnú cifru, takže to musí byť cifra 4. Teraz ľahko doplníme, že písmeno H zastupuje cifru 1 a písmeno Z cifru 4+4=8. Napíšme si tieto informácie do Fedorovej úlohy:

$$\begin{array}{r}
 7 E 4 \\
 + 7 E 4 \\
 \hline
 1 4 Y 8
 \end{array}$$

Zostáva nám posledná časť súčtu. V nej nemáme žiadnu desiatku prenesenú z predošlého sčítania a ani nemáme preniesť desiatku do ďalšieho sčítania. Súčet E+E preto musí byť menší ako 10, čo znamená, že E musí byť menšie ako 5. Máme tak 5 možností, čo môže byť E - 0, 1, 2, 3 a 4. Cifry 1 a 4 môžeme vylúčiť, pretože tie už sú použité. Ďalej nemôžeme použiť cifru 0, lebo by E a Y zastupovali rovnaké cifry, čo nemôžu. Taktiež nemôžeme namiesto E použiť cifru 2, pretože by Y muselo byť 4,

$$\begin{array}{r} 734 \\ + 734 \\ \hline 1468 \end{array}$$

čo už je použité. Jedinou zostávajúcou možnosťou je zvoliť za E cifru 3 a dostať takýto súčet: To znamená, že písmeno E zastupuje cifru 3.

Úloha 15. Farma

Kika chová na svojej farme iba kravy a sliepky, ktorých je spolu 56. Všetky sliepky majú spolu o 28 nôh viac ako všetky kravy dokopy. Koľko nôh spolu majú všetky zvieratá na farme?

Výsledok: 140

Riešenie: Sliepky majú spolu o 28 nôh viac. Týchto 28 nôh má $28:2=14$ sliepok. Ak by sme preto na chvíľu zabudli na týchto 14 sliepok, tak by sliepok a kráv bolo spolu $56-14=42$ a mali by rovnako veľa nôh. Jedna krava má ale toľko nôh, koľko dve sliepky spolu. Preto vieme, že na každé tri zvieratá pripadá jedna krava. Kráv tak musí byť $42:3=14$. Všetkých sliepok (aj s tými, na ktoré sme na chvíľu zabudli) je preto $56-14=42$. To znamená, že všetky zvieratá majú spolu $2\cdot 42+4\cdot 14=140$ nôh.

Úloha 16. Násobné vypisovanie

Andrej a Miška si vypisujú čísla. Andrej si vypísal všetky násobky čísla 12 okrem tých, ktoré začínali cifrou 1. Miška si zas vypísala všetky násobky čísla 22 okrem tých, ktoré začínali cifrou 2. Ktoré najmenšie číslo si vypísali obaja?

Výsledok: 396

Riešenie: Začnime si vypisovať prvých niekoľko čísel, ktoré si vypíše Andrej a ktoré Miška. Andrej: 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...

Miška: 44, 66, 88, ...

Vidíme, že si nevypíšu žiadne rovnaké dvojciferné číslo. Musíme teda hľadať medzi trojčifernými číslami. Avšak tie, ktoré začínajú cifrou 1 si nevypíše Andrej a tie, ktoré začínajú cifrou 2 si nevypíše Miška. Pokračujme preto vo vypisovaní číslami, ktoré začínajú cifrou 3. Andrej začne tieto čísla číslom 300 ($300=25\cdot 12$) a Miška číslom 308 ($308=14\cdot 22$).

Andrej: 300, 312, 324, 336, 348, 360, 372, 384, 396, ...

Miška: 308, 330, 352, 374, 396, ...

Z toho hneď vidíme, že najmenšie číslo, ktoré si vypísali obaja, je číslo 396.

Úloha 17. Digitálny súčet

Erik pozoruje svoje digitálne hodinky, ktoré ukazujú čas od 00:00 do 23:59. Koľkokrát za deň nastane situácia, že súčet cifier, ktoré hodiny ukazujú, je 23?

Výsledok: 4

Riešenie: Zistíme najprv, aký je najväčší súčet cifier, ktorý môže na hodinách nastať. Na mieste hodín môžeme mať niektoré z čísel 0 až 23. Najväčší súčet cifier na tomto mieste je preto $1+9=10$. Na mieste minút môžeme zas mať niektoré z čísel 0 až 59, čo dáva najväčší súčet cifier $5+9=14$. Najväčší súčet cifier, ktorý v priebehu dňa nastane je tak $10+14=24$. To je o jedna viac ako súčet, na ktorý sa nás pýta zadanie. Takýto súčet sa preto dosiahne buď tým, že zmenšíme súčet cifier na mieste hodín o 1, alebo tým, že zmenšíme súčet cifier na mieste minút o 1.

Ak zmenšíme súčet cifier na mieste hodín, bude tento súčet $10-1=9$. To vieme dosiahnuť iba dvomi spôsobmi - ako 09 a ako 18. Dostávame tak dva vyhovujúce časy 09:59 a 18:59.

Ak zmenšíme súčet na mieste minút na $14-1=13$, tak znova budeme mať iba dve možnosti - 49 a 58. Tým získame ďalšie dva vyhovujúce časy 19:49 a 19:58.

Vyhovujú teda iba časy 09:59, 18:59, 19:49 a 19:58, takže daná situácia nastane 4-krát za deň.

Úloha 18. Plot twist

Marcel a Sabinka natierajú plot. Ak by Sabinka natierala 18 dní, Marcel by potreboval ešte 9 dní na to, aby natieranie dokončil. Sabinka ale natierala iba 6 dní, a tak Marcel potreboval 13 dní na dokončenie natierania. Za koľko dní by Sabinka natrela plot, ak by ho natierala sama?

Výsledok: 45

Riešenie: Tým, že Sabinka natierala plot o $18-6=12$ dní menej, tak pridala Marcelovi $13-9=4$ dni natierania. To znamená, že to, čo Sabinka natrila za 12 dní, natrila Marcel za 4 dni. Po predelení štyrmi máme, že to, čo natrila Sabinka za 3 dni, natrila Marcel za 1 deň. Ak by Sabinka natierala 18 dní, tak by jej zostávalo ešte 9 dní Marcelovej práce, ktorú ona spraví za $3\cdot 9=27$ dní. Spolu tak Sabinka potrebuje $18+27=45$ dní na to, aby plot natrela sama.

Úloha 19. Attomat?

Lucka v škole písala test, v ktorom mala odpovedať na 20 otázok. Za správnu odpoveď dostala 5 bodov a za nesprávnu odpoveď 0 bodov. Ak sa ale rozhodla na otázku neodpovedať, dostala za ňu 1 bod. Lucka zistila, aké je najmenšie prirodzené číslo, ktoré označuje počet bodov, ktorý sa v tomto teste nedá dosiahnuť. Akú hodnotu malo toto číslo?

Výsledok: 89

Riešenie: Všimnime si, že všetky počty bodov menšie ako 85 vieme pomerne ľahko poskladať z počtov bodov, ktoré môžeme dostať. Stačí, aby sme dostali päť bodov 0 až 16-krát a jeden bod 0 až 4-krát. Zvyšné otázky nech sú za nula bodov. Napríklad 54 bodov by sme dostali pomocou 10 otázok za päť bodov, 4 otázok za jeden bod a 6 otázok za nula bodov. Taktiež vieme ľahko poskladať počty bodov 85 až 88 – stačí použiť 17-krát úlohu za päť bodov a 0 až 3-krát úlohu za jeden bod. 89 bodov ale dostať nevieme. Potrebujeme na to totiž aspoň 4-krát dostať jeden bod. Ak dostaneme 4-krát jeden bod, tak potrebujeme dostať 17-krát päť bodov. Zjavne sa neoplatí použiť menej úloh za päť bodov a viac úloh za jeden bod. Takže 89 bodov naozaj nevieme dosiahnuť. Takže číslo, ktoré Lucka zistila, bolo 89.

Úloha 20. Najbližší k všetkým

Majo si na číselnej osi vyznačil 11 bodov. Vyznačil si body, ktoré označovali čísla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 a 1024. Teraz je zvedavý, ktorý bod na číselnej osi má najmenší súčet vzdialeností od týchto 11 bodov. Aké číslo má tento bod?

Výsledok: 32

Riešenie: Pozerajme sa, čo sa deje so súčtom vzdialeností, keď sa pohybujeme po číselnej osi. Ak máme napravo viac vyznačených bodov ako naľavo, tak vieme súčet vzdialeností znížiť tým, že sa posunieme doprava. To preto, lebo všetky vzdialenosti sa zmenia o tú istú hodnotu. Ale tých, ktoré sa zmenšia (tých od bodov napravo), bude viac. Takže najmenší súčet vzdialeností určite nebude v takom bode, ktorý má napravo viac vyznačených bodov ako naľavo. Podobne ale môžeme zdvôvodniť, že to nebude v takom bode, ktorý má naľavo viac vyznačených bodov ako napravo. Najmenší súčet vzdialeností od vyznačených bodov tak musí byť v takom bode, ktorý má naľavo od seba rovnako veľa vyznačených bodov ako napravo od seba. Keďže je nepárne veľa vyznačených bodov, tak toto môže nastať iba v niektorom z týchto bodov. Nastane to v tom vyznačnom bode, ktorý má naľavo od seba 5 bodov a aj napravo od seba 5 bodov. Takým bodom je bod s číslom 32. Takže bod, v ktorom bude súčet vzdialeností najmenší, má číslo 32.