



p - mat

Attomat

21.05.2020

Vzorová řešení

Kategorie 5, 6, Prima

Česká verze

Úloha 01. Veselá úloha

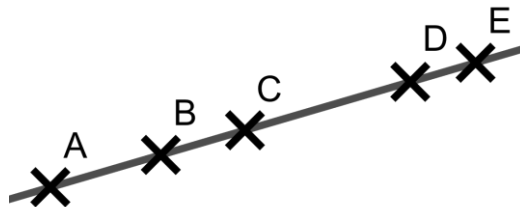
Pavel a Katka si vymysleli veselá čísla. Veselé číslo má jen sudé cifry. Pavel si napsal nejmenší dvojciferné veselé číslo a Katka si napsala nejmenší čtyřciferné veselé číslo. Jaký je součet Pavlova a Katčina čísla?
Poznámka: Cifra 0 je sudá.

Výsledek: 2020

Řešení: Pokud by si Pavel napsal nějaké dvojciferné číslo, muselo toto číslo mít na místě desítek jinou cifru než cifru 0. Zároveň hledáme nejmenší takové číslo, a tak muselo mít na místě desítek nejmenší sudou cifru, která je různá od nuly. A tou je cifra 2. Na místo jednotek už můžeme dát nejmenší sudou cifru - 0. Pavel si proto napsal číslo 20. Katčino číslo muselo také začínat cifrou 2, za kterou musely následovat jen cifry 0. Katka si tak napsala číslo 2000. Součet Pavlova a Katčina čísla je proto $20+2000=2020$.

Úloha 02. Přímá forma zábavy

Patrik si na přímku nakreslil 5 bodů v pořadí A, B, C, D, E. Nakreslil je tak, aby platilo $|AC|=12$ cm, $|BD|=15$ cm, $|CE|=19$ cm, $|AD|=20$ cm. Jaká byla délka úsečky AE v centimetrech?



Výsledek: 31

Řešení: Bod C leží na úsečce AE, jejíž délku máme vypočítat. Proto víme, že platí $|AE|=|AC|+|CE|$. Délky úseček AC a CE ale známe. Proto má úsečka AE délku $12+19=31$ centimetrů.

Úloha 03. Cesta taxíkem

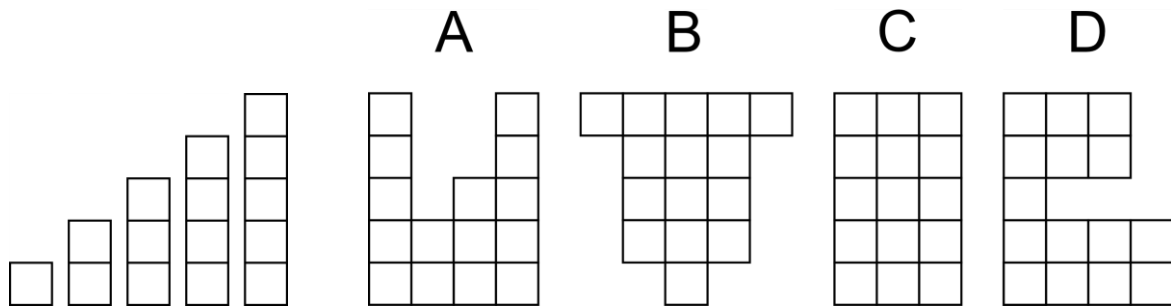
Taxikáři v Chicagu si účtují 3 dolary za první ujetou míli a potom 1 dolar za každou další míli. Kolik nejvíc mil může Kuba ujet taxíkem, pokud má 10 dolarů a ze slušnosti chce dát taxikáři 2 dolary jako spropitné?

Výsledek: 6

Řešení: Odečteme od Kubových 10 dolarů 2 dolary, které dá taxikáři jako spropitné a 3 dolary za první ujetou míli. Dostaneme, že Kuba má $10-2-3=5$ dolarů na to, aby zaplatil za míle po jednom dolaru. Za tyto peníze dokáže ujet 5 mil. Dohromady s první mílí za 3 dolary tak Kuba může ujet taxíkem $5+1=6$ mil.

Úloha 04. Vystřihovánka

Pepík si vystřihl několik pásků, které vidíš na obrázku vlevo. Teď si z nich skládá různé útvary. Který z útvarů na obrázku vpravo nemůže poskládat z těchto pásků?



a) A

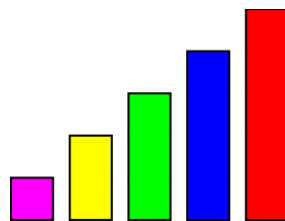
b) B

c) C

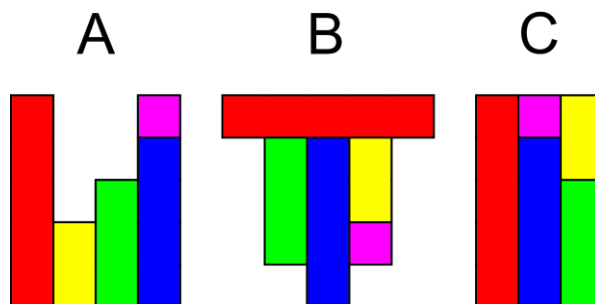
d) D

Výsledek: d) D

Řešení: Aby bylo rozdělení útvarů na jednotlivé pásky lépe vidět, tak si zbarvíme pásky tak, jako na tomto obrázku:

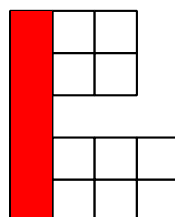


Lehce najdeme způsob, jak poskládat z pásků útvary A, B a C. Například takto:



Útvar D ale z pásků poskládat neumíme. Máme totiž jen jednu možnost, jak umístit nejdelší, červený pásek. Potom ale nebudeme mít kam umístit druhý nejdelší, modrý pásek.

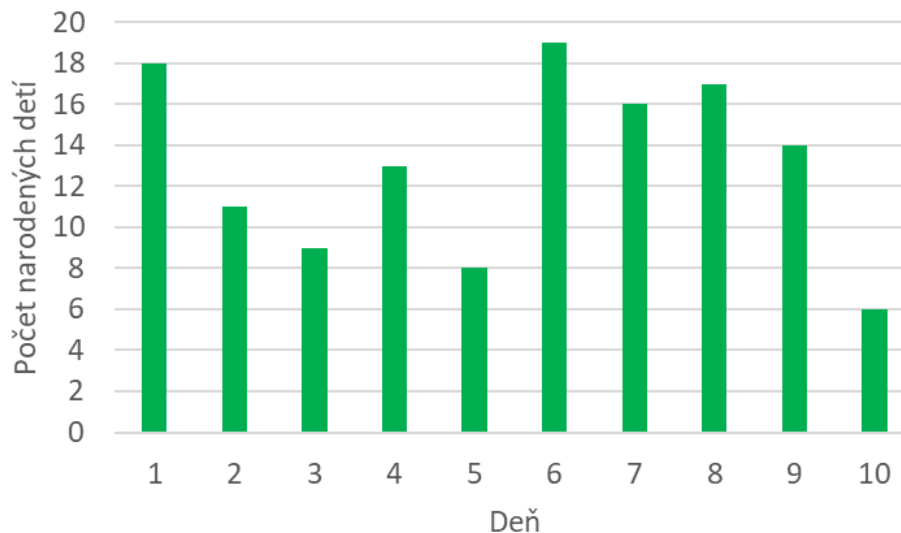
D



Proto neumíme z pásků poskládat jen útvar d) D.

Úloha 05. Nový život

Graf na obrázku ukazuje, kolik dětí se v jednom městě narodilo za prvních deset dní v květnu. Dominika si zapamatovala počet narozených dětí v dni, kdy se jich narodilo nejvíc. Katka si zase zapamatovala počet narozených dětí v dni, kdy se jich narodilo nejméně. O kolik větší číslo si zapamatovala Dominika?



Výsledek: 13

Řešení: Z grafu lehce zjistíme, že nejvíc dětí se narodilo 6. května, kdy se jich narodilo 19. Podobně zjistíme, že nejméně dětí se narodilo 10. května, kdy se jich narodilo jen 6. Dominika si tak zamapatovala číslo 19 a Katka číslo 6. Dominika si proto zapamatovala číslo, které bylo o $19-6=13$ větší.

Úloha 06. Vidíme se příště

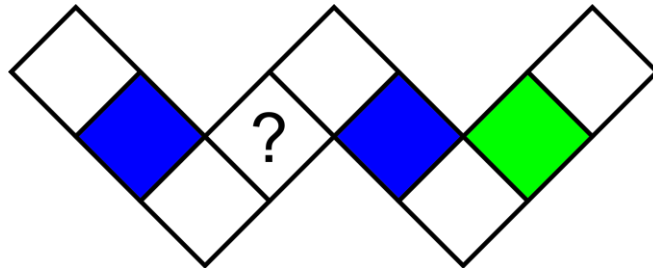
Rok 2020 je speciální. První dvojčíslí tohoto roku je stejné jako poslední dvojčíslí tohoto roku. Kolik nejméně roků si musíme počkat na další takový rok (jiný než rok 2020), že jeho první dvojčíslí bude stejné jako jeho poslední dvojčíslí?

Výsledek: 101

Řešení: Pro první dvojčíslí 20 máme jen jeden rok, který má poslední dvojčíslí 20 - a to 2020. Proto se první dvojčíslí musí změnit. Nejbližší větší dvojčíslí, které můžeme mít, je dvojčíslí 21. Pro první i poslední dvojčíslí 21 máme rok 2121. Ten je tedy nejbližším rokem, který má stejné první i poslední dvojčíslí. Potřebujeme si na něj počkat $2121-2020=101$ let.

Úloha 07. Barevné čtverečky

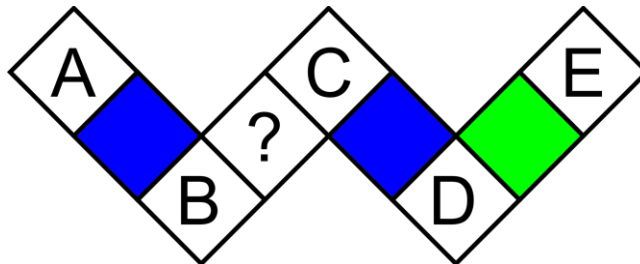
Laura si nakreslila několik čtverečků. Začala je vybarvovat červenou, modrou a zelenou barvou. Některé čtverečky už vybarvila tak, jak vidíš na obrázku. Zbýlé čtverečky chce vybarvit tak, aby každá trojice čtverečků, které jsou v řadě, obsahovala čtvereček každé z těchto tří barev. Jakou barvu bude mít čtvereček s otazníkem?



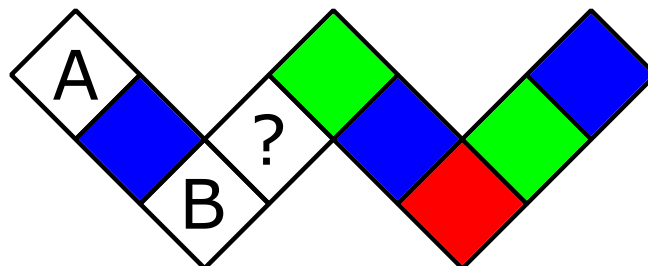
- a) červenou b) zelenou c) modrou d) nelze určit

Výsledek: c) modrou

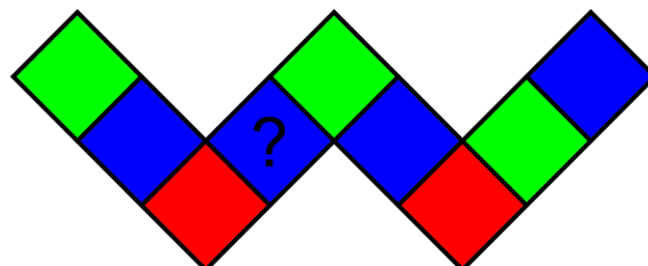
Řešení: Označme si jednotlivé čtverečky tak, jako na tomto obrázku:



Podívejme se nyní na čtvereček označený písmenem D. Nachází se v řadě se zeleným čtverečkem a i v řadě s modrým čtverečkem. Proto nemůže mít žádnou z těchto barev (jinak by v některé řadě chyběla některá z barev), a tak musí být červený. Potom lehce doplníme, že čtvereček E musí být modrý a čtvereček C zelený. Dostaneme se to tohoto stavu:



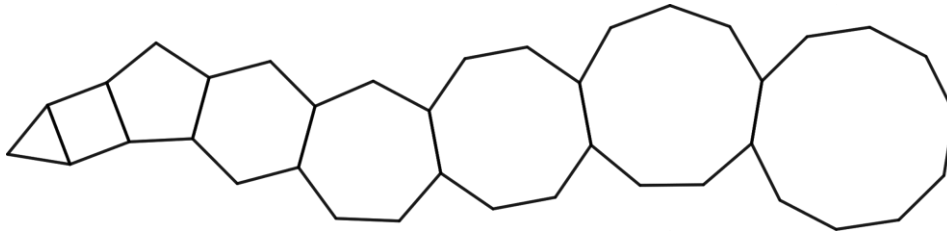
Nyní se zaměříme na čtvereček B. Nachází se v řadě se zeleným čtverečkem i v řadě s modrým čtverečkem. Takže musí být červený. Tím pádem už umíme jednoduše doplnit všechny ostatní čtverečky:



To znamená, že čtvereček označený otazníkem bude c) modrý.

Úloha 08. Počet stran

Tomáš se učí kreslit pravidelné mnohoúhelníky. Nakreslil si rovnostranný trojúhelník, k němu přikreslil čtverec, k němu pravidelný pětiúhelník, k němu pravidelný šestiúhelník, a tak dále. Skončil tím, že k pravidelnému devítiúhelníku přikreslil pravidelný desetiúhelník. Dostal útvar jako na obrázku. Kolik stran měl tento útvar?

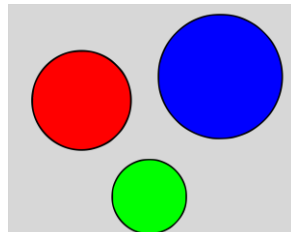


Výsledek: 38

Řešení: Podívejme se, kolik stran přidáme připojením jednoho mnohoúhelníku. Jednu stranu mnohoúhelníku a jednu stranu už vzniklého útvaru musíme použít na spojení těchto dvou útvarů. Jinak ale přidáme všechny ostatní strany mnohoúhelníku. Přidáním jednoho mnohoúhelníku tak zvýšíme počet stran výsledného útvaru o počet stran přidávaného mnohoúhelníku zmenšený o dva. Postupně tak přidáme 2, 3, 4, a tak dále až 8 stran. Začínáme s trojúhelníkem, který má 3 strany, takže výsledný útvar bude mít $3+2+3+4+5+6+7+8=38$ stran.

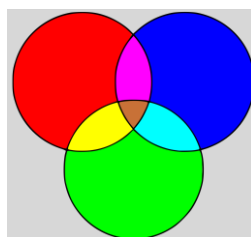
Úloha 09. Dělicí kružnice

Petr si nakreslil na papír tři kružnice. Ty rozdělily papír na několik částí. Petr každou z částí (včetně té, která neležela v žádné z kružnic) vybarvil jinou barvou. Například pokud by si nakreslil kružnice jako na obrázku, tak by použil 4 různé barvy - červenou, modrou, zelenou a šedou. Kolik nejvíc různých barev mohl Petr použít?



Výsledek: 8

Řešení: Postupně přidáváme jednotlivé kružnice. Po nakreslení první kružnice máme papír rozdělený na dvě části. Přidáním druhé můžeme každou z těchto částí rozdělit touto kružnicí na dvě. Dostaneme tak dohromady $2 \cdot 2 = 4$ částí. Třetí kružnicí znovu můžeme rozdělit každou z těchto částí na dvě a dostat tak dohromady $2 \cdot 4 = 8$ částí. Nejvíc částí, které můžeme dostat, je tak 8 jako například na tomto obrázku:



Petr tak mohl použít nejvíc 8 různých barev.

Úloha 10. Běžecská rozcvička

Luboš chodí běhávat k stromořadí, kde je vysazených dvanáct topolů v jedné dlouhé řadě. Jsou vysazené tak, že vzdálenost mezi každými dvěma sousedními topoly je stejná. Lubošovi trvá 45 sekund než zaběhne od prvního topolu k čtvrtému. Kolik sekund mu trvá zaběhnout od prvního topolu k poslednímu?

Výsledek: 165

Řešení: Když Luboš zaběhne od prvního stromu k čtvrtému, tak zaběhne 3 úseky mezi jednotlivými stromy. Zaběhnout jeden úsek mu proto trvá $45:3=15$ sekund. Na to, aby zaběhl od prvního stromu k dvanáctému, musí uběhnout 11 těchto úseků. To mu bude trvat $11 \cdot 15=165$ sekund.

Úloha 11. Advent

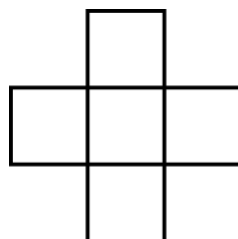
Pepa vyráběl adventní ozdobu. Vzal si červený papír a pětkrát ho přeložil na polovinu. Takto poskládaný papír potom v středu propíchnul a papír rozložil. Kolik děr bylo v papíru?

Výsledek: 32

Řešení: Pokaždé, když Pepa přeloží papír, tak se počet vrstev papíru zdvojnásobí. Na začátku má papír jen jednu vrstvu. Po prvním přeložení jich bude $2 \cdot 1=2$. Po druhém přeložení bude mít papír $2 \cdot 2=4$ vrstvy, po třetím $2 \cdot 4=8$, po čtvrtém $2 \cdot 8=16$ a po pátém přeložení bude mít papír $2 \cdot 16=32$ vrstev. Když takto poskládaný papír Pepa propíchně, tak propíchně každou vrstvu právě jednou. Na papíru tak vznikne přesně tolik děr, kolik bylo vrstev po přeložení, tedy 32.

Úloha 12. Součtový kříž

Martin vepsal do každého čtverečku na obrázku čísla 1, 2, 3, 4, 5, každé právě jednou. Součet tří čísel v středním řádku byl stejný jako součet tří čísel v středním sloupci. Jakou největší hodnotu mohl mít tento součet?



Výsledek: 10

Řešení: Číslo, které se nachází v políčku v středu se započítává do obou součtů. Pokud chceme, aby byly oba součty co největší, chceme, aby se v obou součtech započítávalo co největší číslo. Tím je číslo 5, které proto umístíme do středního políčka. Zbylá čísla musíme umístit tak, aby byly oba součty stejné. Proto potřebujeme čísla 1, 2, 3 a 4 rozdělit do dvou dvojic se stejným součtem. Jednoduše je rozdělíme do dvojic $1+4$ a $2+3$. Každá z dvojic budou součástí jednoho ze součtů. Hledaný součet proto bude $1+4+5=2+3+5=10$.

Úloha 13. Pravdomluvné pondělky

Dominika se rozhodla, že v pondělí, čtvrtek a sobotu bude mluvit jen pravdu. Ostatní dny v týdnu bude jen lhát. Jednoho dne řekla: „Zítra budu mluvit pravdu.“ Který den v týdnu to řekla?

Výsledek: úterý

Řešení: Všimněme si, co o Dominice vypovídá, že řekla „Zítřa budu mluvit pravdu“. Pokud ten den mluví pravdu, tak i následující den mluví pravdu. Pokud ten den lže, tak i následující den lže. Tuto větu tak může říct jen tehdy, pokud má dva po sobě jdoucí dny, v průběhu kterých buď oba mluví pravdu, nebo oba lže. Takové dny jsou ale u Dominiky jen úterý a středa, v průběhu kterých lže. Dominika proto mohla tuto větu říct jen v úterý.

Úloha 14. Hmyzožrout

Fedor se učil sčítat. Napsal si úlohu na sčítání a správně ji vypočítal. Vtom mu ale do pokoje vešel jeho mladší bratr a každou cifru nahradil nějakým písmenem. Stejně cifry nahradil stejnými písmeny, různé cifry různými písmeny. Když se na to Fedor podíval, uviděl to, co vidíš na obrázku. Chtěl získat svoji původní úlohu, ale už si ji nepamatoval. Věděl, že písmeno J zastupuje cifru 7. Také si pamatoval, že písmeno M zastupuje nějakou sudou cifru. Jakou cifru zastupuje písmeno E?

$$\begin{array}{r}
 J E M \\
 + J E M \\
 \hline
 H M Y Z
 \end{array}$$

Výsledek: 3

Řešení: Napišme si do úlohy cifru 7 místo písmena J:

$$\begin{array}{r}
 7 E M \\
 + 7 E M \\
 \hline
 H M Y Z
 \end{array}$$

Hned vidíme, že písmeno M může zastupovat buď cifru 4, nebo cifru 5 - podle toho, v předcházejícím sčítání došlo k přechodu přes desítku. Jenže M má zastupovat nějakou sudou cifru, takže to musí být cifra 4. Nyní lehce doplníme, že písmeno H zastupuje cifru 1 a písmeno Z cifru 4+4=8. Napišme si tyto informace do Fedorovy úlohy:

$$\begin{array}{r}
 7 E 4 \\
 + 7 E 4 \\
 \hline
 1 4 Y 8
 \end{array}$$

Zůstává nám poslední část součtu. V ní nemáme žádnou desítku přenesenou z předešlého sčítání a ani nemáme přenést desítku do dalšího sčítání. Součet E+E proto musí být menší než 10, což znamená, že E musí být menší než 5. Máme tak 5 možností, co může být E: 0, 1, 2, 3 a 4. Cifry 1 a 4 můžeme vyloučit, protože ty už jsou použité. Dále nemůžeme použít cifru 0, protože E a Y by zastupovali stejné cifry, což nemůžou. Také nemůžeme použít za E cifru 2, protože Y by musel být 4, a cifra 4 už je použita.

$$\begin{array}{r}
 734 \\
 + 734 \\
 \hline
 1468
 \end{array}$$

Jediná zbývající možnost je zvolit za E cifru 3 a dostat tento součet:
To znamená, že písmeno E zastupuje cifru 3.

Úloha 15. Farma

Kika chová na své farmě jen krávy a slepice, kterých je dohromady 56. Všechny slepice mají dohromady o 28 nohou více než všechny krávy dohromady. Kolik nohou mají dohromady všechna zvířata na farmě?

Výsledek: 140

Řešení: Slepice mají dohromady o 28 nohou více. Těchto 28 nohou má $28:2=14$ slepic. Pokud bychom proto na chvíli zapomněli na těchto 14 slepic, tak by slepic a krav bylo dohromady $56-14=42$ a měly by stejný počet nohou. Jedna kráva má ale tolik nohou, co dvě slepice. Proto víme, že na každá tři zvířata připadá jedna kráva. Krav tak musí být $42:3=14$. Všech slepic (včetně těch, na které jsme na chvíli zapomněli) je proto $56-14=42$. To znamená, že všechna zvířata mají dohromady $2 \cdot 42 + 4 \cdot 14 = 140$ nohou.

Úloha 16. Vypisování násobků

Ondřej a Miška si vypisují čísla. Ondřej si vypsál všechny násobky čísla 12 kromě těch, které začínají cifrou 1. Miška si zase vypsala všechny násobky čísla 22 kromě těch, které začínají cifrou 2. Které nejmenší číslo si vypsali oba dva?

Výsledek: 396

Řešení: Začneme si vypisovat prvních několik čísel, která si vypíše Ondřej, a která si vypíše Miška.

Ondřej: 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...

Miška: 44, 66, 88, ...

Vidíme, že si nevypíší žádné stejné dvojciferné číslo. Musíme tedy hledat mezi trojcifernými čísly. Avšak ta, která začínají cifrou 1, si nevypíše Ondřej a ta, která začínají cifrou 2, si nevypíše Miška. Pokračujme proto ve vypisování čísel, která začínají cifrou 3. Ondřej začne tato čísla číslem 300 ($300=25 \cdot 12$) a Miška číslem 308 ($308=14 \cdot 22$).

Ondřej: 300, 312, 324, 336, 348, 360, 372, 384, 396, ...

Miška: 308, 330, 352, 374, 396, ...

Z toho hned vidíme, že nejmenší číslo, které si vypsali oba, je číslo 396.

Úloha 17. Digitální součet

Erik pozoruje svoje digitální hodinky, které ukazují čas od 00:00 do 23:59. Kolikrát za den nastane situace, že součet cifer, které hodiny ukazují, je 23?

Výsledek: 4

Řešení: Zjistíme nejdřív, jaký je největší součet cifer, který může na hodinách nastat. Na místě hodin můžeme mít některé z čísel 0 až 23. Největší součet cifer na tomto místě je proto $1+9=10$. Na místě minut můžeme zase mít některé z čísel 0 až 59, což dává největší součet cifer $5+9=14$. Největší součet cifer, který v průběhu dne nastane je tak $10+14=24$. To je o jedna více než součet, na který se nás ptá zadání. Takového součtu proto dosáhneme buď tím, že zmenšíme součet cifer na místě hodin o 1, nebo tím, že zmenšíme součet cifer na místě minut o 1.

Pokud zmenšíme součet cifer na místě hodin, bude tento součet $10-1=9$. Toho umíme dosáhnout jen dvěma způsoby - jako 09 a jako 18. Dostáváme tak dva vyhovující časy 09:59 a 18:59.

Pokud zmenšíme součet na místě minut na $14-1=13$, tak znova budeme mít jen dvě možnosti: 49 a 58. Tím získáme další dva vyhovující časy 19:49 a 19:58.

Vyhovují tedy jen časy 09:59, 18:59, 19:49 a 19:58, takže daná situace nastane 4krát za den.

Úloha 18. Plot twist

Marcel a Sabina natírají plot. Pokud by Sabina natírala 18 dní, Marcel by potřeboval ještě 9 dní na to, aby natírání dokončil. Sabina ale natírala jen 6 dní, a tak Marcel potřeboval 13 dní na dokončení natírání. Za kolik dní by Sabina natřela plot, pokud by ho natírala sama?

Výsledek: 45

Řešení: Tím, že Sabina natírala plot o $18-6=12$ dní méně, tak přidala Marcelovi $13-9=4$ dny natírání. To znamená, že to, co Sabina natře za 12 dní, natře Marcel za 4 dny. Po vydělení čtyřmi zjistíme, že to, co natře Sabina za 3 dny, natře Marcel za 1 den. Pokud by Sabina natírala 18 dní, tak by jí zbývalo ještě 9 dní Marcelovy práce, kterou ona udělá za $3\cdot 9=27$ dní. Dohromady tak Sabina potřebuje $18+27=45$ dní na to, aby plot natřela sama.

Úloha 19. Attomat?

Lucka psala ve škole test, v kterém měla odpovědět na 20 otázek. Za správnou odpověď dostala 5 bodů a za nesprávnou odpověď 0 bodů. Pokud se rozhodla na otázku neodpovědět, dostala za ni 1 bod. Lucka zjistila, jaké je nejmenší přirozené číslo, které označuje počet bodů, který v tomto testu nejde dosáhnout. Jakou hodnotu mělo toto číslo?

Výsledek: 89

Řešení: Všimněme si, že všechny počty bodů menší než 85 umíme poměrně lehce poskládat z počtu bodů, které můžeme dostat. Stačí, abychom dostali pět bodů 0 až 16krát a jeden bod 0 až 4krát. Zbylé otázky at' jsou za nula bodů. Například 54 bodů bychom dostali pomocí 10 otázek za pět bodů, 4 otázky za jeden bod a 6 otázek za nula bodů. Také umíme lehce vyskládat počty bodů 85 až 88 - stačí použít 17krát úlohu za 5 bodů a 0 a 3krát úlohu za 1 bod. Pokud dostaneme 4krát jeden bod, tak potřebujeme dostat 17krát pět bodů. Zjevně se nevyplatí použít méně úloh za pět bodů a víc úloh za jeden bod. Takže 89 bodů doopravdy neumíme dosáhnout. Takže číslo, které Lucka zjistila, bylo 89.

Úloha 20. Nejbližší ke všem

Majo si na číselné ose vyznačil 11 bodů. Vyznačil si body, které označovaly čísla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 a 1024. Teď je zvědavý, který bod na číselné ose má nejmenší součet vzdáleností od těchto 11 bodů. Jaké číslo má tento bod?

Výsledek: 32

Řešení: Podívejme se, co se děje se součtem vzdáleností, když se pohybujeme po číselné ose. Pokud máme vpravo více vyznačených bodů než vlevo, tak umíme součet vzdáleností snížit tím, že se posuneme doprava. To proto, že všechny vzdálenosti se změní o stejnou hodnotu. Ale těch, které se zmenší (vzdáleností od bodů vpravo), bude více. Takže nejmenší součet vzdáleností určitě nebude v takovém bodě, který má vlevo více vyznačených bodů než vpravo. Nejmenší součet vzdáleností od vyznačených bodů tak musí být v takovém bodě, který má vlevo od sebe stejně vyznačených bodů jako vpravo od sebe. Protože bodů je lichý počet, tak toto může nastat jen v některém z těchto bodů. Nastane to v tom vyznačeném bodu, který má vlevo od sebe 5 bodů a i vpravo od sebe 5 bodů. Tímto bodem je bod s číslem 32. Takže bod, v kterém bude součet vzdáleností nejmenší, má číslo 32.