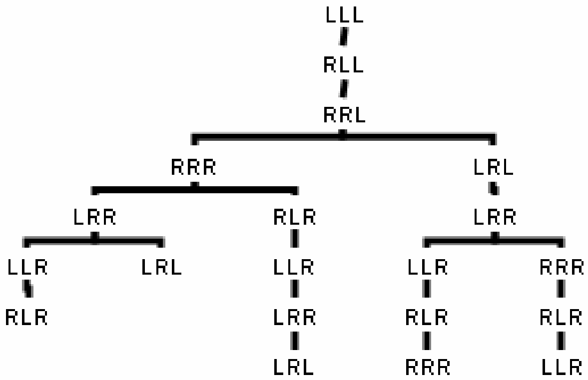
Príklad S5: Hra. *Opravovala Kaťa Smolárová.*



Existuje 8 rôznych rozložení mincí, keďže mince sú tri a každá z nich môže byť otočená rubom alebo lícom hore ($2^3 = 8$). Keďže na jednej z pozícií začíname, zostáva nám ich ešte 7. Prvý hráč vždy otáča na párnu pozíciu a druhý na nepárnu. To znamená, že prvý hráč vyhrá v prípade, ak sa využijú všetky pozície.
Prvé dva ťahy tejto hry musia prebehnúť tak, že sa otočia niektoré 2 mince na stole. Pre ďalší priebeh hry je jedno, ktoré mince otočíme, pretože sa iba navzájom vymenia pozície, kde sa nachádzajú 2 mince (napríklad RLR s RRL), ale nezmení celkový priebeh hry. Na obrázku je diagram, ako môže prebiehať hra po týchto prvých dvoch ťahoch. Vidíme, že druhý hráč vyhrá iba v jednom zo všetkých možných prípadoch. Najlepšie pre prvého hráča je v jeho 2. ťahu neťahať na RRR, pretože v tom prípade (ako vidno v diagrame) už môže ťahať akokoľvek a vždy vyhrá. Druhý hráč môže vyhrať iba v prípade, že hra prebehne napríklad nasledovne: LLL-RLL-RRL-RRR-LRR-LLR-RLR, teda 1. hráč sa v dvoch prípadoch rozhodne pre nesprávnu pozíciu a preto prehrá.

Bodovanie: 0,5 bodu za zistenie, že možností je rozloženia mincí je 8, 1 bod za pochopenie, čo to vlastne stratégia je, 1 bod za vypísanie možností, ako môže hra prebiehať, a 1,5 bodu za postup.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Jackov vek. *Opravovala Alica Nagyová (riešenie podľa Viktora Szabadosa).*

Na začiatku bolo vhodné zvoliť si rozsah čísel, s ktorými budeme pracovať (1 bod). Obyčajný človek sa môže dožiť do tých sto rokov, niekedy aj viac, ak ste teda počítali aj vo väčšom rozsahu, bod ste získali. Avšak tí, ktorí rátali len do 50 apod. dostali maximálne 0,5 bodu.
Zistiť reálny vek sa dalo viacerymi spôsobmi. Väčšina si najskôr uvedomila, že musí ísť o nepárne číslo, lebo keď od nepárneho čísla odčítam 3 (tiež nepárne), vyjde mi číslo párne, teda deliteľné 2 (1 bod).
Ak pričítaš 4, je deliteľné 5. Kritérium deliteľnosti piatimi je podmienka, že posledná cifra je 0 alebo 5 → posledná cifra hľadaného čísla je 1 alebo 6. Poslednou cifrou 6 však byť nemôže, lebo ide o nepárne číslo (1 bod).
Ak pričítaš 8, je deliteľné 7. $1+8 = 9$ → číslo končiace cifrou 9 je deliteľné 7, ak sa rovná $49+70x$, kde x je nezáporné celé číslo. Prečo to tak je, si skúste rozmyslieť sami. (1 bod)
V rozmedzí 9, 10,…,108 sa nachádza len číslo 49 → $49–8 = 41$ (ďalšie také číslo je 119), stačí už len preveriť, či vek 41 zodpovedá aj ostatným podmienkam. Pozor! Nezabudnite ukázať, že pre číslo 41 platia všetky podmienky (1 bod).
Samozrejme, plný počet bodov si zaslúžia aj iné postupy, ak obsahujú logické vysvetlenie toho, prečo je v danom rozmedzí len jedno riešenie a neobsahujú matematické chyby typu "$41–5 = 36:6 = 6$" (-1 bod).

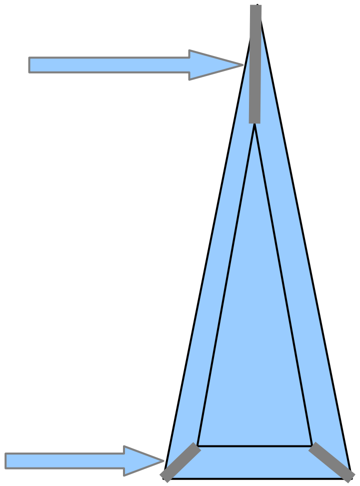
Bodovanie: Bodovanie príkladu je súčasťou vzorového riešenia.

Príklad S2: Výhybkáreň. *Opravoval Michal „Kladivo“ Kováč.*

Úlohou bolo nájsť bod, ktorý je od križovatiek rovnako vzdialený. V trojuholníku tvoreného traťami je taký bod - stred opísanej kružnice, lebo jeho vzdialenosť od každého vrcholu je rovná polomeru opísanej kružnice. Stred opísanej kružnice sa dá zostrojiť ako priesečník osí strán (os strany je kolmica na stranu prechádzajúca jej stredom). Lenže stred strany nemusí ležať na papieri, takže výhybkáreň musím nájsť inak. Zaujímavý nápad je zmenšiť si celú situáciu, nájsť stred opísanej kružnice a naspäť to zväčšiť. Čo ale znamená zmenšiť a zväčšiť? Zväčšovanie si môžeme predstaviť ako pozeranie lupou. Len pozerať lupou môžeme na rôzne miesta. Preto je dobré zaviesť si pojem zväčšovanie vzhľadom na bod. Podobne sa dá popísať aj zmenšovanie. V našom príklade chceme teda celú situáciu zmenšiť, vyriešiť a potom naspäť zväčšiť. Aby nám však ostala pôvodná situácia, musíme zväčšovať a zmenšovať podľa toho istého bodu (ľubovoľného, ktorý leží na papieri) a tým istým pomerom (napr. dvojnásobne).

Ako sa zmenšuje bod (A) podľa bodu X: Spravíme úsečku AX, napríklad v jej strede leží hľadaný bod, teda je to len dvojnásobné zmenšenie. Zväčšovanie je podobné, len sa na polpriamku XA nanesie dvojnásobná dĺžka XA od bodu X – dvojnásobné zväčšenie.
Ako sa zmenšuje/zväčšuje priamka podľa bodu X: Vieme, že priamka je určená dvoma bodmi, tak zmenšíme/zväčšíme dva body, ktoré potom určujú zmenšenú/zväčšenú priamku.
Takže späť k príkladu – už je to celkom jednoduché, zmenšíme si všetky trate, aby sa nám zmestili na mapu, nájdeme priesečník osí strán, ktorý naspäť zväčšíme podľa toho istého bodu. To bude hľadaná výhybkáreň.

Bodovanie: Najviac sa dalo získať 5 bodov, ale na to bolo potrebné mať správne riešenie pre ľubovoľný trojuholník, ktorého výhybkáreň leží na mape. Musel som niečo strhnúť tým, čo predpokladali, že stred každej strany leží na mape a potom len spravili osi strán, lebo keby stred strany neležal na mape, podľa toho postupu sa úloha nedala vyriešiť. Takisto som body strhol tým, čo preklápali časť trojuholníka mimo mapy (pri nejakom vrchole) cez okraj mapy a dúfali, že sa im vrchol preklopí do mapy. Za tieto nedostatky som strhol len pol boda, lebo pre niektoré trojuholníky to predsa len bolo správne riešenie. Oveľa horšie na tom boli tí, čo si trojuholník zmenšili tak, že spravili rovnobežky so stranami v rovnakej vzdialenosti od tých strán a vyriešili úlohu pre takto zmenšený trojuholník. Bohužiaľ to funguje len pre rovnostranný trojuholník, preto za také riešenie boli najviac 2 body. Totiž keď je vzdialenosť výhybkárne rovnaká od vrcholov zmenšeného trojuholníka, nemusí byť rovnaká pre pôvodné vrcholy(viď obrázok) Takéto zmenšovanie trojuholníka by fungovalo, keby sa hľadal stred *vpísanej* kružnice, lebo ten má vzdialenosť rovnakú od každej strany. Za riešenie, že je to v ťažisku alebo v priesečníku výšok, alebo kdesi medzi, bolo menej ako 2. Rysovanie ťažiska je tiež zaujímavá, ale o to ľahšia úloha. Ocenil som aj obrázky a vtipy, ale nie bodovo:)



Príklad S3: Príklad z písmen. *Opravoval Martin „Kotanyi" Godány.*

Toto bola jedna z úloh, ktoré ste buď vyriešili, alebo nevyriešili. Napriek tomu sa však body dali udeľovať za to, ako podrobne a dostatočne ste svoje tvrdenia zdôvodňovali. Prípadne, či bolo vaše zdôvodnenie správne. Prejdime však ku riešeniu (-;
Prvý fakt, ktorý si väčšina z vás všimla, bolo, že $M = 0$. Oporu pre správnosť tohto výroku nájdeme v príklade z tretieho riadku. Všimnime si, že na mieste jednotiek sčitujeme $M+S = S$. Odčítaním S z oboch strán rovnice dospejeme ku záveru, že $M = 0$ (keďže za jednotkami už nie sú žiadne ďalšie cifry, nemôže pri sčitovaní týchto neexistujúcich cifier dôjsť ku prechodu cez desiatku, takže táto operácia je uskutočniteľná). Pozor! To, že $M = 0$, sa nedalo odvodiť z príkladu v 1. stĺpci. Na mieste jednotiek tu totiž delíme $M:L = M$. Áno, na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že $M = 0$, ale M sa môže rovnať aj čokoľvek iné. V príklade $12:6 = 2$ sa cifry na mieste jednotiek v delenci a podieli nelíšia a sú nenulové...
Teraz sa zameriame na K. Áno, K skutočne bolo rovné 1, ale z iného dôvodu, než uvádzala väčšina z vás. Odvádzali ste to znova z príkladu v 1. stĺpci – keď vydelíme $L:L = K$, K musí byť zákonite 1. No... Dôvod, prečo to až tak zákonité nemusí byť, je veľmi podobný tomu, prečo sa M nemuselo rovnať 1. Zverejnime však ten správny dôvod. Je o niečo zložitejší: Najprv si pod seba prepíšme príklad z tretieho riadku. Pri sčitovaní jednotiek ku prechodu cez desiatku nedošlo, takže môžeme bezpochybne prehlásiť, že $K+K = J$, t.j. $2K = J$. Ďalej mrknime na sčitovanie cifier na mieste tisícok. Vidíme, že $J+J = S$, prípadne $J+J+1 = S$, keďže nemáme žiadnu informáciu o tom, či pri sčitovaní stoviek došlo ku prechodu cez desiatku... Takže S sa dá vyjadriť ako 2J, alebo 2J+1. Pokračujme vo vyjadrovaní – $S = 4K$ alebo $S = 4K + 1$. Vieme, že S musí byť menšie alebo rovné 9. V prípade, že $K = 1$, tak $S = 4$ alebo $S = 5$. Pokiaľ je K rovné 2, tak $S = 8$ alebo $S = 9$. K preto môže byť 1 alebo 2. Teraz však hoďme okom na príklad v treťom stĺpci. V čísle NMKJ je na mieste tisícok iná cifra než v čísle SIJS na mieste tisícok. To môže znamenať jediné: $N = S+1$ (od čísla NKMJ sme odčitovali trojciferné číslo, preto sa cifra na mieste tisícok nemohla znížiť o viac, než o 1). Teraz sa však pozrime na príklad v 1. riadku. Znova ide o odčitovanie, takže $I > N$ (Tentoraz nevieme o koľko, pretože sme odčitovali štvorciferné číslo). K čomu toto celé vedie? Teraz vidíme, že máme najmenej dve čísla väčšie ako S, takže S nemôže byť ani 8, ani 9. A preto K nemôže byť 2 – a preto $K = 1$ a $J = 2$.

```
 JSKM
+JLKS
 ----
 SIJS
```

Ostatné čísla už dopočítame veľmi jednoducho. Najprv P a L. V príklade v druhom stĺpci doplníme dosiaľ známe cifry. A vidíme hneď niekoľko vecí. Jednak $1+P = 1$, čo môže znamenať dve veci. Buď $P = 0$, čo nemôže, pretože $M = 0$, alebo sa pri sčitovaní cifier na mieste jednotiek prechádzalo cez desiatku. Preto ten súčet vyzerá takto: $1+P+1 = 11$. Z tohto je už zjavné, že $P = 9$. Keďže sa však i tu prechádzalo cez desiatku, platí, že $2+1 = L$.
Teraz už dokážeme odhaliť i S. Už sme sa dozvedeli, že $S = 4$ alebo $S = 5$. Znova použijeme príklad z 3. riadku. Vieme, že pri sčitovaní $S+3 = I$ určite neprejdeme cez desiatku, takže $2+2 = S$ musí byť správne. Teda $S = 4$, $I = 7$ a $N = 5$.
Pokračujme s písmenom O. Do príkladu v 3. riadku doplňme známe čísla. $O = 8$. A nakoniec potrebujeme zistiť písmená P a R. $3.PR = 288$. $P = 9$, $R = 6$. Hotovo.

```
 221O
+  PR
 ----
 2L1S
```

```
 2S10
+231S
 ----
 SI2S
```

```
 5012
- 2OO
 ----
 4724
```

Bodovanie: Za správne riešenie a odôvodnenie ste, prekvapujúco, dostali 5 bodov (-: 4,3 boda dostali tí, ktorí mali správne riešenie, ale niektoré úseky nedostatočne vysvetlené, prípadne sa dopustili drobných chýb, ktoré viedli ku iným drobným chybám. 4 body boli za správne riešenie, ale nesprávne zdôvodnenia, prečo $K = 1$ a/alebo $M = 0$ a/alebo $J+J = S$. 3,5 boda dostali tí, ktorí mali správne riešenie, ale chýbalo zdôvodnenie tvrdení. 2,5 boda bolo za správne riešenie bez postupu a 1,5 za chýbajúci výsledok, ale zjavnú snahu o nájdenie.

Príklad S4: Obradná tabuľka. *Opravoval Martin „Panda" Svetlík.*

Do každého políčka tabuľky 5×5 máme vpísať jedno z čísel 1,2,3 tak, aby v každom z piatich riadkov, piatich stĺpcov a dvoch diagonál bol rôzny súčet týchto čísel. Keby sme niekde dali samé jednotky, dostali by sme najmenší možný súčet 5. Obdobne vieme dostať maximálne 15 pomocou samých trojok. Čiže súčty sú čísla od 5 do 15 vrátane – to je 11 rôznych súčtov. A keďže potrebujeme rôzne do 5 riadkov, 5 stĺpcov a 2 diagonál, tak 11 nám nestačí. Potrebujeme aspoň 5+5+2=12 rôznych súčtov. Preto sa takáto tabuľka nedá zostrojiť.

Bodovanie: Väčšina z vás prišla na to, že tabuľka sa nedá zostrojiť, a väčšina z tejto väčšiny aj prišla na to, prečo. No a väčšina z tejto väčšiny z väčšiny z vás to aj dostatočne zdôvodnila a podľa miery miernych nejasností dostala 4,5 – 5 bodov.
Ak ste uviedli len pár pokusov a potom že sa to nedá, tak ste mohli dostať maximálne 2,5 bodu.