

**Vzorové riešenia****4. séria pre žiakov 3. a 4. ročníka SŠ a septimy a oktávy OG**

①

V tejto úlohe sa jedná o šikmý vrh pod uhlom $\alpha = 30^\circ$, pri čom poznáme dĺžku vrhu $s = 35,5$ m. Ak hádzeme kameňom z počiatku súradnicovej sústavy, tak v ľubovoľnom čase t sú súradnice kameňa dané rovnicami $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2$, kde v_0 je počiatočná rýchlosť kameňa. Ak sa miesto hodu a miesto dopadu nachádzajú v rovnakej výške (tak ako v tejto úlohe), pri dopade kameňa platí $y = 0$, resp. $0 = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2$, odkiaľ doba letu kameňa bude

$$t_d = 2v_0 \sin \alpha / g.$$

a) Pre dĺžku hodu potom platí

$$x = s = v_0 t_d \cos \alpha = v_0 (2v_0 \sin \alpha / g) \cos \alpha = 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g,$$

odkiaľ počiatočná rýchlosť kameňa bude

$$v_0 = \sqrt{(sg / 2 \sin \alpha \cos \alpha)} = \sqrt{[(35,5 \text{ m} \cdot 9,8 \text{ ms}^{-2}) / (2 \cdot 0,5 \cdot 0,87)]} = 20 \text{ ms}^{-1}.$$

Janko musí hodiť kameň rýchlosťou 20 ms⁻¹.

b) Doba letu kameňa je potom $t_d = 2v_0 \sin \alpha / g = 2 \cdot 20 \text{ ms}^{-1} \cdot 0,5 / 9,8 \text{ ms}^{-2} = 2,04 \text{ s}$.

Kameň doletí k dopravnej značke za 2,04 s.

Správne odpovede: a) 20 ms⁻¹ b) 2,04 s

Bodovanie:
2 body za správnu odpoveď
2 body za 20,04 alebo 20,05 v a)
2 body za 2,05 v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

Označme si:

$v_1 = 400 \text{ ms}^{-1}$ rýchlosť strely pred vstupom do dosky

$v_2 = 100 \text{ ms}^{-1}$ rýchlosť strely po prelete cez dosku

$t = ?$ doba letu strely v doske

$F = 60 \text{ kN}$ priemerná odporová sila dosky

a priemerné spomalenie strely v doske

$m = 50 \text{ g}$ hmotnosť strely

$s = ?$ hrúbka dosky

a) Pohyb strely v doske je rovnomerne spomalený, takže pre rýchlosť strely po prelete cez dosku platí $v_2 = v_1 - at$. Spomalenie strely bolo spôsobené odporovou silou dosky, platí teda $a = F / m$. Z druhej rovnice dosadíme a do prvej rovnice a vyjadríme t :

$$t = (v_1 - v_2) m / F = (400 \text{ ms}^{-1} - 100 \text{ ms}^{-1}) \cdot 0,05 \text{ kg} / 60 \text{ kN} = 0,00025 \text{ s} = 0,25 \text{ ms}.$$

Strela sa pohybovala vo vnútri dosky 0,25 ms.

b) Strela prejde v doske dráhu s , pričom proti jej pohybu pôsobí odporová sila F . Pre dráhu s platí:

$$s = v_1 t - at^2 / 2 = v_1 t - Ft^2 / 2m =$$

$$s = 400 \text{ ms}^{-1} \cdot 0,00025 \text{ s} - 60 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (0,00025 \text{ s})^2 / (2 \cdot 0,05 \text{ kg}) = 0,0625 \text{ m} = \mathbf{6,25 \text{ cm}}$$

Doska má hrúbku 6,25 cm.

Správne odpovede: a) 0,25 ms b) 6,25 cm

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď

0 bodov za nesprávnu odpoveď

③

Rotujúce koleso predstavuje neinerciálnu vzťažnú sústavu. Na Petra s hmotnosťou $m = 70$ kg pôsobia počas pohybu rýchlosťou $v = 10 \text{ ms}^{-1}$ po kružnici s polomerom $r = 8 \text{ m}$ dve sily: tiažová sila $F_G = mg$, ktorá má vždy zvislý smer nadol a odstredivá sila $F_o = mv^2 / r$, ktorá vždy smeruje zo stredu kružnice, po ktorej sa Peter pohybuje, k Petrovi.

a) V najvyššom bode kolesa majú tieto sily opačný smer a výsledná sila pôsobiaca na Petra je daná ich rozdielom

$$F = [m \cdot (v^2 / r)] - mg = m \cdot (v^2 / r - g) = 70 \text{ kg} \cdot [(10 \text{ ms}^{-1})^2 / 8 \text{ m} - 9,8 \text{ ms}^{-2}] = \mathbf{189 \text{ N}}$$

V najvyššom bode bol Peter pritláčaný k sedačke silou 189 N.

b) V najnižšom bode kolesa majú tieto sily rovnaký smer a výsledná sila pôsobiaca na Petra je daná ich súčtom

$$F = [m \cdot (v^2 / r)] + mg = m \cdot (v^2 / r + g) = 70 \text{ kg} \cdot [(10 \text{ ms}^{-1})^2 / 8 \text{ m} + 9,8 \text{ ms}^{-2}] = \mathbf{1 561 \text{ N}}$$

V najnižšom bode bol Peter pritláčaný k sedačke silou 1 561 N.

Správne odpovede: a) 189 N b) 1 561 N

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď

2 body za -189 N

1 bod za 875 N

0 bodov za nesprávnu odpoveď

④

a) Ak je spínač rozopnutý, rezistory R_2 a R_4 sú zapojené sériovo voči sebe, avšak paralelne k rezistoru R_1 . Prúd prechádzajúci ampérmetrom určíme z Ohmovho zákona: $I_1 = U / R'$, kde R' je celkový odpor obvodu a podľa pravidiel pre spájanie rezistorov platí

$$1 / R' = (1 / R_1) + [1 / (R_2 + R_4)]. \text{ Úpravou dostaneme } R' = [R_1 (R_2 + R_4)] / (R_1 + R_2 + R_4)$$

a po dosadení

$$I_1 = U / R' = [U (R_1 + R_2 + R_4)] / [R_1 (R_2 + R_4)] =$$

$$= [24 \text{ V} (40 \Omega + 20 \Omega + 20 \Omega)] / [40 \Omega (20 \Omega + 20 \Omega)] = \mathbf{1,2 \text{ A}}$$

Keď je spínač rozopnutý, prechádza ampérmetrom prúd 1,2 A.

b) Ak je spínač zopnutý, rezistory R_3 a R_4 sú zapojené paralelne voči sebe, avšak sériovo k rezistoru R_2 . Tieto tri rezistory sú zapojené paralelne k rezistoru R_1 . Analogickým postupom ako v a) treba určiť prúd $I_2 = U / R''$, kde R'' je celkový odpor obvodu, pre ktorý platí

$$1 / R'' = (1 / R_1) + [1 / (R_2 + R_0)], \text{ kde } R_0 \text{ je odpor časti obvodu, ktorá obsahuje spínač. Platí}$$

$$1 / R_0 = (1 / R_3) + (1 / R_4), \text{ odkiaľ}$$

$$R_0 = (R_3 R_4) / (R_3 + R_4) = (20 \Omega \cdot 20 \Omega) / (20 \Omega + 20 \Omega) = 10 \Omega.$$

Potom $R'' = [R_1 (R_2 + R_0)] / (R_1 + R_2 + R_0)$ a pre hľadaný prúd dostaneme

$$I_2 = U / R'' = [U (R_1 + R_2 + R_0)] / [R_1 (R_2 + R_0)] =$$

$$= [24 \text{ V} \cdot (40 \Omega + 20 \Omega + 10 \Omega)] / [40 \Omega (20 \Omega + 10 \Omega)] = \mathbf{1,4 \text{ A}}$$

Keď je spínač zopnutý, prechádza ampérmetrom prúd 1,4 A.

Správne odpovede: a) 1,2 A b) 1,4 A

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď

0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤

Tlak v balóne je konštantný a množstvo molekúl v balóne sa tiež nemení, takže deje prebiehajúce s plynom sú izobarické. Pre tieto deje platí $V_a / T_a = V_b / T_b$, kde indexy a a b popisujú stav plynu v dvoch rôznych okamihoch, T je teplota plynu v Kelvinoch a V je objem plynu v m^3 .

a) Označme si:

$$T_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C} = 303,15 \text{ K} \dots \dots \dots \text{ po čiatočnú teplotu plynu}$$

$$V_1 \dots \dots \dots \text{ počiatočný objem plynu}$$

$$T_2 = -150 \text{ }^\circ\text{C} = 123,15 \text{ K} \dots \dots \dots \text{ konečnú teplotu plynu}$$

$$V_2 \dots \dots \dots \text{ konečný objem plynu}$$

V tomto prípade platí $V_1 / T_1 = V_2 / T_2$, odkiaľ $V_1 / V_2 = T_1 / T_2 = 303,15 \text{ K} / 123,15 \text{ K} = 2,46$, takže $V_1 = \mathbf{2,46 \cdot V_2}$.

Objem vzduchu v balóne by sa zmenšil 2,46-krát.

b) Označme si:

$$T_3 = ? \dots \dots \dots \text{ teplota plynu po zohrievaní}$$

$$V_3 = 0,5 V_1 \dots \dots \dots \text{ objem plynu po zohrievaní}$$

$$\text{V druhom prípade platí } V_3 / V_1 = T_3 / T_1,$$

$$\text{odkiaľ potom } T_3 = (V_3 / V_1) T_1 = [(0,5 \cdot V_1) / V_1] T_1 = 0,5 \cdot T_1 = 151,575 \text{ K} = \mathbf{-121,58^\circ\text{C}}.$$

Balón by mal polovičný objem pri teplote -121,58°C.

Správne odpovede: a) 2,46-krát b) -121,58°C

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď

0 bodov za nesprávnu odpoveď