

jeho polohová energia vo výške $h = 3,6$ m nad zemou je $E_p = 378$ J. To znamená, že platí: $378 \text{ J} = m \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 3,6 \text{ m}$ (lebo pre polohovú energiu vedra platí „vzorec“ $E_p = m \cdot g \cdot h$). Z toho si vyjadríme neznámu hmotnosť m : $m = 378 \text{ J} / (10 \text{ N/kg} \cdot 3,6 \text{ m}) = 10,5 \text{ kg}$.

Podľa zadania mal pomocník pri zdvíhaní vedra s maltou výkon $P = 35 \text{ W}$. To znamená, že pri zdvíhaní vedra vykonal za každú jednu sekundu mechanickú prácu $W_1 = 35 \text{ J}$. Zároveň to znamená, že pri zdvíhaní sa polohová energia tohto vedra zvýšila za každú sekundu o 35 J – na toto sa „spotrebovala“ mech. práca, ktorú konal pomocník pri zdvíhaní vedra.

Pri zdvíhaní vedra s hmotnosťou $m = 10,5 \text{ kg}$ zo zeme (z výšky $h_0 = 0 \text{ m}$ nad zemou) do výšky $h_4 = 4 \text{ m}$ nad zemou sa zvýšila polohová energia vedra z hodnoty $E_{p0} = m \cdot g \cdot h_0 = 10,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 0 \text{ m} = 0 \text{ J}$ na hodnotu $E_{p4} = m \cdot g \cdot h_4 = 10,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 4 \text{ m} = 420 \text{ J}$. Pri tom vykonal pomocník mechanickú prácu $W = E_{p4} - E_{p0} = 420 \text{ J} - 0 \text{ J} = 420 \text{ J}$. A túto mechanickú prácu vykonal za (W / W_1) sekúnd, teda za čas $t = W / P = 420 \text{ J} / 35 \text{ W} = 12 \text{ s}$. To znamená, že **vedro s maltou sa dostalo do výšky 4 m nad zemou za 12 sekúnd**.

Správne odpovede: a) 0,35 m/s b) 12 s

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
1 bod za hodnotu v intervale od 0,34 do 0,36 v a)
1 bod za hodnotu v intervale od 11,97 do 12,03 v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤ Označme si:

$d = ?$ šírka jazera (vzdialenosť od vysielača k prijímaciemu zariadeniu)
 $v_1 = 340 \text{ m/s}$ rýchlosť zvukového signálu vo vzduchu
 $v_2 = 1440 \text{ m/s}$ rýchlosť zvukového signálu vo vode
 $t_1 = ?$ čas, za ktorý sa dostal k prijím. zariadeniu zvukový signál vo vzduchu
 t_2 čas, za ktorý sa dostal k prijímaciemu zariadeniu zvukový signál vo vode

Podľa zadania sa k prijímaciemu zariadeniu dostal signál vo vode o 2,75 s skôr než signál vo vzduchu. Pritom obidva signály boli vyslané naraz. To znamená, že signál vo vode prešiel vzdialenosť d od vysielača k prijímaciemu zariadeniu za o 2,75 s kratší čas než signál vo vzduchu, čiže platí: $t_2 = t_1 - 2,75 \text{ s}$.

Ak vzdialenosť d prešiel signál vo vzduchu rýchlosťou $v_1 = 340 \text{ m/s}$ za čas t_1 , tak platí rovnosť $v_1 \cdot t_1 = d$. Ak tú istú vzdialenosť d prešiel signál vo vode rýchlosťou $v_2 = 1440 \text{ m/s}$ za čas t_2 , tak platí aj rovnosť $v_2 \cdot t_2 = d$, a teda platí $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$. Ak za čas t_2 dosadíme výraz $t_1 - 2,75 \text{ s}$, dostaneme rovnicu $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot (t_1 - 2,75 \text{ s})$, v ktorej jedinou neznámou veličinou je čas t_1 , ktorý máme vypočítať. Po dosadení zadaných číselných hodnôt v_1 a v_2 získame nasledujúcu rovnicu, ktorú budeme postupne upravovať:

$340 \text{ m/s} \cdot t_1 = 1440 \text{ m/s} \cdot (t_1 - 2,75 \text{ s})$; $340 \text{ m/s} \cdot t_1 = 1440 \text{ m/s} \cdot t_1 - 1440 \text{ m/s} \cdot 2,75 \text{ s}$;
 $340 \text{ m/s} \cdot t_1 - 1440 \text{ m/s} \cdot t_1 = -3960 \text{ m}$; $-1100 \text{ m/s} \cdot t_1 = -3960 \text{ m}$; a z toho je
 $t_1 = -3960 \text{ m} / (-1100 \text{ m/s}) = (3960/1100) \text{ s} = 3,6 \text{ s}$ (presne).

a) Zistili sme, že vo vzduchu sa dostal signál k prijímaciemu zariadeniu za čas $t_1 = 3,6 \text{ s}$. Za tento čas prešiel tento signál rýchlosťou $v_1 = 340 \text{ m/s}$ vzdialenosť d , pre ktorú platí:

$d = v_1 \cdot t_1 = 340 \text{ m/s} \cdot 3,6 \text{ s} = 1224 \text{ m}$.

To znamená, že prijímacie zariadenie na druhej strane jazera sa nachádzalo vo vzdialenosti 1224 m od vysielača, a teda **šírka jazera je podľa tohto merania 1224 m**.

b) Ako sme vypočítali vyššie, **zvukový signál vo vzduchu sa šírila k prijímaciemu zariadeniu 3,6 s**.

Správne odpovede: a) 1224 m b) 3,6 s

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
1 bod za hodnotu v intervale od 1223 do 1225 v a)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

Vzorové riešenia

4. séria pre žiakov kvarty OG

① a) Označme si:

$S = 1,2 \text{ m}^2$ plošný obsah príklopu batyskaфу
 $\rho = 1020 \text{ kg/m}^3$ hustota morskej vody v Atlantickom oceáne
 $h_1 = 5000 \text{ m}$ hĺbka, v ktorej sa nachádzal batyskaф na začiatku manévru
 $h_2 = 4500 \text{ m}$ hĺbka, v ktorej sa nachádzal batyskaф na konci manévru
 F_1 tlaková sila pôsobiaca na príklop batyskaфу na začiatku manévru
 F_2 tlaková sila pôsobiaca na príklop batyskaфу na konci manévru
 $g = 10 \text{ N/kg}$

Pre veľkosť tlakovej sily F , ktorá pôsobí na príklop batyskaфу v morskej vode v hĺbke h pod hladinou, platí: $F = h \cdot \rho \cdot g \cdot S$. Z toho vyplýva, že na začiatku manévru (v hĺbke $h_1 = 5000 \text{ m}$) pôsobila na príklop batyskaфу tlaková sila

$F_1 = h_1 \cdot \rho \cdot g \cdot S = 5000 \text{ m} \cdot 1020 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 1,2 \text{ m}^2 = 61200000 \text{ N} = 61200 \text{ kN}$

a na konci manévru (v hĺbke $h_2 = 4500 \text{ m}$) naňho pôsobila tlaková sila

$F_2 = h_2 \cdot \rho \cdot g \cdot S = 4500 \text{ m} \cdot 1020 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 1,2 \text{ m}^2 = 55080000 \text{ N} = 55080 \text{ kN}$.

Vidíme, že pri tomto manévri sa tlaková sila pôsobiaca na príklop batyskaфу **zmenšila**, a to o $F_1 - F_2 = 61200 \text{ kN} - 55080 \text{ kN} = 6120 \text{ kN}$.

Tlaková sila pôsobiaca na príklop batyskaфу sa pri tomto manévri zmenšila o 6120 kN.

b) V časti a) sme vypočítali, že v hĺbke 5000 m pod hladinou Atlantického oceánu pôsobila na príklop batyskaфу tlaková sila $F_1 = 61200 \text{ kN}$.

Ak by sa ten istý batyskaф ponoril do „sladkovodného mora“ s hustotou $\rho_{\text{voda}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ do hĺbky h , pôsobila by tam na jeho príklop tlaková sila $F = h \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g \cdot S$. Táto sila bude rovnako veľká ako sila F_1 vtedy, keď bude platiť $F_1 = h \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g \cdot S$. V akej hĺbke h to bude? Má platiť $61200000 \text{ N} = h \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 1,2 \text{ m}^2$, a preto

$h = 61200000 \text{ N} / (1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 1,2 \text{ m}^2) = 5100 \text{ m}$.

Rovnaká tlaková sila ako v hĺbke 5000 m pod hladinou Atlantického oceánu by pôsobila na príklop batyskaфу v hĺbke 5100 m pod hladinou „sladkovodného mora“.

Správne odpovede: a) B: zmenšila o 6120 kN b) 5100 m

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
1 bod za odpoveď „B“ s nesprávnou číselnou hodnotou v a)
1 bod za odpoveď „A“ s hodnotou 6120 kN v a)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

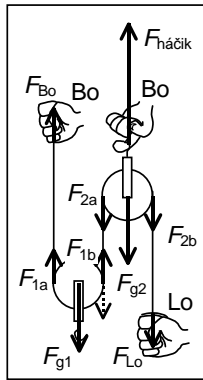
Do obrázku, ktorý bol uvedený v zadaní úlohy, si dokreslíme sily, ktoré pôsobia na spodnú kladku (sily F_{g1} , F_{1a} a F_{1b}), na vrchnú kladku (sily F_{g2} , F_{2a} , F_{2b} a $F_{\text{náčik}}$) a ktorými B_0 a L_0 pôsobia na konce lanka (sily F_{B_0} a F_{L_0}) – pozri obrázok na nasledujúcej strane.

Podľa zadania majú obidve kladky rovnakú hmotnosť $m = 800 \text{ g} = 0,8 \text{ kg}$. Preto na obidve

kladky pôsobí v smere zvislo nadol rovnako veľká gravitačná sila

$$F_{g1} = F_{g2} = m \cdot g = 0,8 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 8 \text{ N}.$$

Na spodnú kladku pôsobí lanko z jednej strany silou F_{1a} , z druhej strany silou F_{1b} . Aby bola spodná kladka v pokoji, musí byť v rovnovážnej polohe, a preto musia mať sily F_{1a} a F_{1b} rovnakú veľkosť. No nielen to. Aby bola spodná kladka v pokoji, musí byť výsledná sila, ktorá na ňu pôsobí, nulová. Teda sily F_{g1} , F_{1a} a F_{1b} , ktoré na ňu pôsobia, musia byť v rovnováhe. Sily F_{1a} a F_{1b} pôsobia na spodnú kladku v smere zvislo nahor, čiže v opačnom smere, ako na ňu pôsobí gravitačná sila F_{g1} . Preto pre veľkosti týchto síl musí platiť (podmienka rovnováhy): $F_{g1} = F_{1a} + F_{1b}$. Ak vezmeme do úvahy to, čo už vieme, že $F_{g1} = 8 \text{ N}$ a $F_{1a} = F_{1b}$, dostaneme: $8 \text{ N} = F_{1b} + F_{1b}$, čiže $2 \cdot F_{1b} = 8 \text{ N}$, a teda $F_{1b} = 4 \text{ N}$.



Predstavme si silu F , ktorou pôsobí spodná kladka na lanko medzi kladkami (na obrázku je nakreslená prerušovanou čiarou). Táto sila má rovnakú veľkosť a opačný smer ako sila F_{1b} , ktorou pôsobí lanko medzi kladkami na spodnú kladku (zákon akcie a reakcie). Takže jej veľkosť je $F = 4 \text{ N}$.

a) Na lanko, prevesené cez vrchnú kladku, pôsobí na jednej strane L_o silou F_{L_o} , ktorú máme vypočítať, na druhej strane spodná kladka silou $F = 4 \text{ N}$. Ak B_o drží vrchnú kladku tak, že sa nachádza v pokoji, môžeme ju považovať za pevnú kladku. Táto kladka je v rovnovážnej polohe vtedy, keď sa veľkosti síl F a F_{L_o} rovnajú. Preto veľkosť sily F_{L_o} je **4 N**.

Lo pôsobí na dolný koniec lanka v smere zvislo nadol silou 4 N.

b) Aby bola vrchná kladka v pokoji, musí byť výsledná sila, ktorá na ňu pôsobí, nulová. Na vrchnú kladku pôsobia v smere zvislo nadol sily F_{g2} (gravitačná) a F_{2a} a F_{2b} (lanko z jednej a z druhej strany). V smere zvislo nahor na ňu pôsobí len sila $F_{háčik}$, ktorou ju za háčik drží B_o vo vzduchu. (Iné sily na vrchnú kladku nepôsobia.) Aby boli tieto sily v rovnováhe, musí pre ich veľkosti platiť: $F_{háčik} = F_{g2} + F_{2a} + F_{2b}$. Z toho určíme veľkosť sily $F_{háčik}$, ktorú máme vypočítať; najprv ale zistíme veľkosti síl F_{2a} a F_{2b} . (Veľkosť sily F_{g2} už poznáme, $F_{g2} = 8 \text{ N}$.)

Sila F_{2a} , ktorou pôsobí lanko medzi kladkami na vrchnú kladku, má rovnakú veľkosť (a opačný smer) ako sila, ktorou pôsobí vrchná kladka na lanko medzi kladkami. Túto silu (ktorou pôsobí vrchná kladka na lanko medzi kladkami) si označme F^* . Na lanko medzi kladkami pôsobí jednak sila F^* v smere zvislo nahor, jednak sila F , ktorou naňho pôsobí spodná kladka, v smere zvislo nadol. Aby bolo lanko medzi kladkami v pokoji, musia byť sily F a F^* v rovnováhe, teda musia mať rovnakú veľkosť. Veľkosť sily F sme už zistili, $F = 4 \text{ N}$. Preto veľkosť sily F^* musí byť tiež 4 N . Sila F_{2a} má rovnakú veľkosť ako sila F^* , takže $F_{2a} = 4 \text{ N}$.

Aby bola vrchná kladka v rovnovážnej polohe, musia byť veľkosti síl F_{2a} a F_{2b} rovnaké. Tak pre veľkosť sily F_{2b} dostaneme, že $F_{2b} = 4 \text{ N}$. Teraz už ľahko vypočítame veľkosť sily $F_{háčik}$, ktorou B_o pôsobí na háčik kladky: $F_{háčik} = F_{g2} + F_{2a} + F_{2b} = 8 \text{ N} + 4 \text{ N} + 4 \text{ N} = 16 \text{ N}$.

Bo pôsobí na háčik kladky silou 16 N.

Správne odpovede: a) 4 N b) 16 N

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
0 bodov za nesprávnu odpoveď

③ a) Označme si:

- $s_J = 4 \text{ km}$ dráha, ktorú prebežovala Janka na „zelenom“ okruhu
- $s_E = 9,3 \text{ km}$ dráha, ktorú prebežovala Evka na „modrom“ okruhu
- s_{J1} dráha, ktorú prebežovala Janka od štartu po lúku s besiedkou
- $s_{E1} = ?$ dráha, ktorú prebežovala Evka od štartu po lúku s besiedkou
- $v_J = 4 \text{ km/h}$ rýchlosť, ktorou sa pohybovala Janka pri bežkovaní

- $v_E = 10 \text{ km/h}$ rýchlosť, ktorou sa pohybovala Evka pri bežkovaní
- t_{J1} čas, za ktorý Janka prebežovala od štartu po lúku s besiedkou
- t_{E1} čas, za ktorý Evka prebežovala od štartu po lúku s besiedkou

Vieme, že lúka s besiedkou sa nachádza presne v polovici „zeleného“ okruhu. To znamená že od štartu po lúku s besiedkou prebežovala Janka dráhu $s_{J1} = s_J : 2 = 4 \text{ km} : 2 = 2 \text{ km}$. Túto dráhu prešla Janka rýchlosťou $v_J = 4 \text{ km/h}$ za čas $t_{J1} = s_{J1} / v_J = 2 \text{ km} / (4 \text{ km/h}) = 0,5 \text{ h}$ (rýchlosťou 4 km/h by za hodinu prešla 4 km , čiže polovičnú dráhu prešla za polovičný čas). Podľa zadania vyštartovali obidve dievčatá naraz, ale Evka prišla na lúku s besiedkou o 3 minúty skôr než Janka. Preto $t_{E1} = t_{J1} - 3 \text{ min} = 0,5 \text{ h} - 3 \text{ min} = 30 \text{ min} - 3 \text{ min} = 27 \text{ min} = (27/60) \text{ h} = 0,45 \text{ h}$. Za tento čas prešla Evka svojou rýchlosťou $v_E = 10 \text{ km/h}$ dráhu $s_{E1} = v_E \cdot t_{E1} = 10 \text{ km/h} \cdot 0,45 \text{ h} = 4,5 \text{ km}$.

Takže **od štartu po lúku s besiedkou prebežovala Evka dráhu 4,5 km.**

b) Využijeme označenie použité v časti a). Ďalej si označíme:

- s_{J2} dráha, ktorú prebežovala Janka od lúky s besiedkou do cieľa
- s_{E2} dráha, ktorú prebežovala Evka od lúky s besiedkou do cieľa
- t_{J2} čas, za ktorý Janka prebežovala od lúky s besiedkou do cieľa
- t_{E2} čas, za ktorý Evka prebežovala od lúky s besiedkou do cieľa

Od lúky s besiedkou do cieľa prebežovala Janka po „zelenom“ okruhu dráhu $s_{J2} = s_J - s_{J1} = 4 \text{ km} - 2 \text{ km} = 2 \text{ km}$. Túto dráhu prešla rýchlosťou $v_J = 4 \text{ km/h}$ za čas $t_{J2} = s_{J2} / v_J = 2 \text{ km} / (4 \text{ km/h}) = 0,5 \text{ h} = 30 \text{ min}$.

Evka prebežovala od lúky s besiedkou do cieľa po „modrom“ okruhu dráhu $s_{E2} = s_E - s_{E1} = 9,3 \text{ km} - 4,5 \text{ km} = 4,8 \text{ km}$. Túto dráhu prešla rýchlosťou $v_E = 10 \text{ km/h}$ za čas $t_{E2} = s_{E2} / v_E = 4,8 \text{ km} / (10 \text{ km/h}) = 0,48 \text{ h} = (0,48 \cdot 60) \text{ min} = 28,8 \text{ min}$.

Vidíme, že Evka prebežovala od lúky s besiedkou do cieľa za kratší čas než Janka. Pri tom vieme, že od lúky s besiedkou vyrazili obidve dievčatá súčasne. Preto do cieľa prišla Evka skôr než Janka. O koľko skôr? $t_{J2} - t_{E2} = 30 \text{ min} - 28,8 \text{ min} = 1,2 \text{ min}$. To znamená, že **Evka čakala po príchode do cieľa na Janku 1,2 min.**

Správne odpovede: a) 4,5 km b) B: Evka čakala na Janku 1,2 min
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
1 bod za hodnotu v intervale od 4,49 do 4,51 v a)
1 bod za odpoveď „B“ s nesprávnou číselnou hodnotou v b)
1 bod za odpoveď „A“ s hodnotou 1,2 min v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

④ a) Označme si:

- $m = 10,8 \text{ kg}$ hmotnosť vedra s pieskom
- $E_p = 378 \text{ J}$ polohová energia vedra po 10 sekundách od začiatku zdvíhania
- $v = ?$ rýchlosť, ktorou sa vedro pohybovalo pri zdvíhaní

Keď sa vedro nachádza nad zemou v nejakej výške h , má polohovú energiu $E_p = m \cdot g \cdot h$. Takto môžeme zistiť, v akej výške h sa vedro nachádzalo po 10 sekundách od začiatku zdvíhania. Vtedy totiž platilo pre jeho polohovú energiu toto: $378 \text{ J} = 10,8 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot h$. Z toho si vyjadríme neznámu výšku h : $h = 378 \text{ J} / (10,8 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg})$, a teda $h = 3,5 \text{ m}$. Pri zdvíhaní sa vedro za čas $t = 10 \text{ s}$ dostalo zo zeme (z výšky 0 m nad zemou) do výšky $h = 3,5 \text{ m}$ nad zemou, čiže prešlo v zvislom smere dráhu $s = 3,5 \text{ m}$. Preto rýchlosť, ktorou sa pohybovalo pri zdvíhaní hore, bola $v = s / t = 3,5 \text{ m} / 10 \text{ s} = 0,35 \text{ m/s}$.

Toto vedro sa pri zdvíhaní pohybovalo rýchlosťou 0,35 m/s.

b) Vedro s maltou má nejakú hmotnosť m , ktorú nepoznáme. Zo zadania však vieme, že