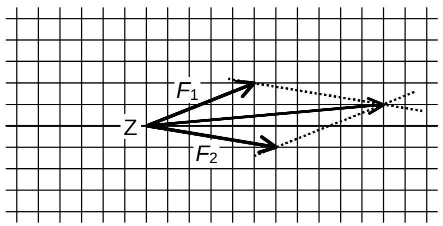
rovnomerným pohybom rýchlosťou v = 2 m/s dráhu $s = v \cdot t$ = 2 m/s · 30 s = 60 m v smere zvislo nahor. Táto dráha zodpovedá výške 16 poschodí (z 13. na 29. poschodie). Preto výška jedného poschodia v tejto budove je $h = s$ / 16 = 60 m / 16 = **3,75 m**.
Výška jedného poschodia v budove riaditeľstva VZB je 3,75 m.

Správne odpovede: **a) 19,8 kW** **b) 3,75 m**
Bodovanie: **2 body** za správnu odpoveď
0 bodov za nesprávnu odpoveď

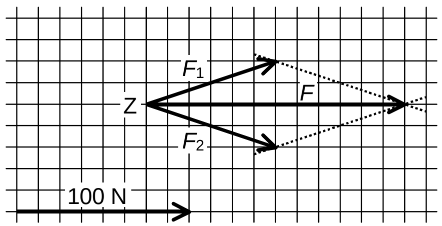
⑤

a) Výslednicu síl F_1 a F_2 nájdeme pomocou tzv. rovnobežníka síl. Do obrázku č. 1, ktorý bol uvedený v zadaní úlohy, dokreslíme rovnobežky k orientovaným úsečkám, ktoré znázorňujú sily F_1 a F_2, tak, aby vznikol rovnobežník, ktorého dvoma susednými stranami sú orientované úsečky znázorňujúce sily F_1 a F_2 – pozri obrázok vpravo. Výslednicu síl F_1 a F_2, ktorú hľadáme, potom znázorníme ako orientovanú uhlopriečku tohto rovnobežníka: jej začiatočný bod bude bod Z a jej koncový bod bude štvrtý vrchol rovnobežníka (ten, ktorý vznikol ako priesečník rovnobežiek, ktoré sme dokreslili do obrázka).



obrázok č. 1

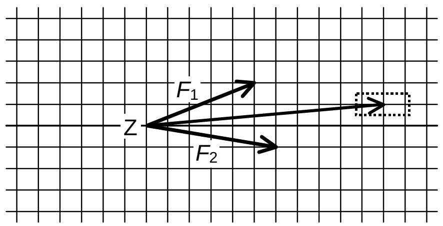
b) Pri riešení tejto časti úlohy využijeme obrázok č. 2, ktorý bol uvedený v zadaní úlohy. Rovnakým spôsobom ako v časti a) si pomocou rovnobežníka síl znázorníme do obrázku výslednicu síl F_1 a F_2, ktorej veľkosť hľadáme – pozri obrázok vpravo.
Vidíme, že výslednica F je znázornená orientovanou úsečkou, ktorej dĺžka je 12 dielikov. Zároveň, sila 100 N je v zadaní znázornená na tomto obrázku orientovanou úsečkou, ktorej dĺžka je 8 dielikov. Preto hľadaná veľkosť sily F bude (12/8)-krát väčšia ako veľkosť sily 100 N. Teda platí:
F = (12/8) · 100 N = 1,5 · 100 N = **150 N**.
Výsledná sila, ktorou tieto dva kone spolu pôsobia na záprah, má v tomto prípade veľkosť 150 N.



obrázok č. 2

Správne odpovede:
a) šípka znázornená na obrázku vpravo (tá, ktorá je tam „navyše" oproti zadaniu)
b) 150 N (obrázok č. 2 sa nehodnotí)

Bodovanie: **2 body** za správnu odpoveď
1 bod v a), ak koncový bod šípky (štvrtý vrchol rovnobežníka) leží niekde v obdĺžniku, ktorý je vyznačený na obrázku vpravo
1 bod v a), ak v rovnobežníku so správne umiestneným štvrtým vrcholom chýba uhlopriečka
1 bod v b), za hodnotu v intervale od 135 N do 165 N
0 bodov za nesprávnu odpoveď



obrázok č. 1 – k bodovaniu

Vzorové riešenia

3. séria pre žiakov kvarty OG

① **a)** Označme si:
s = 4800 m............................. dĺžka celej trate
t_{Nolan} = 5 min = 300 s .... čas, za ktorý prebehol celú trať Nolan
t_{Monti}.. čas, za ktorý prebehol celú trať Monti
$t_{rozdiel}$ = 3 s .... o koľko skôr dobehol do cieľa Monti než Nolan
$v_{p\text{-}Monti}$ .... priemerná rýchlosť Montiho na celej trati
$v_{p\text{-}Nolan}$ .... priemerná rýchlosť Nolana na celej trati

Obidva kone prebehli rovnako dlhú trať, teda rovnakú dráhu s = 4800 m, avšak každý za iný čas. Čas, za ktorý prebehol celú trať Nolan, poznáme. Čas, za ktorý prebehol celú trať Monti, si vypočítame: obidva kone vyštartovali naraz, ale Monti dobehol do cieľa o 3 sekundy skôr než Nolan, takže bežal o 3 s kratšie. Preto $t_{Monti} = t_{Nolan} - t_{rozdiel}$ = 300 s – 3 s = 297 s.
Aby sme mohli vypočítať rozdiel medzi priemernými rýchlosťami obidvoch koní, musíme najprv poznať ich priemerné rýchlosti. Tie si však vieme ľahko vypočítať:
$v_{p\text{-}Nolan} = s / t_{Nolan}$ = 4800 m / 300 s = 16 m/s = (16 · 3,6) km/h = 57,6 km/h (presne)
$v_{p\text{-}Monti} = s / t_{Monti}$ = 4800 m / 297 s = (4800/297) m/s = ((4800/297) · 3,6) km/h ≈
≈ 58,181818 km/h
Ich rozdiel potom bude: $v_{p\text{-}Monti} - v_{p\text{-}Nolan}$ = ((4800/297) · 3,6) km/h – 57,6 km/h,
$v_{p\text{-}Monti} - v_{p\text{-}Nolan}$ ≈ 58,181818 km/h – 57,6 km/h = 0,581818 km/h ≈ **0,58 km/h**.
Monti prebehol celú trať o 0,58 km/h väčšou priemernou rýchlosťou než Nolan.

b) Vieme, že Monti prebehol cieľom o 3 sekundy skôr než Nolan. Ak by Nolan prebehol celú trať rovnomerným pohybom, tak by v okamihu, keď Monti prebehol cieľom, bol v určitej vzdialenosti x pred cieľom. Túto vzdialenosť by prebehol rovnomerným pohybom za 3 sekundy.
Pri rovnomernom pohybe prejde teleso (kôň) za rovnako veľké časové úseky rovnaké dráhy. Celú trať, dráhu s = 4800 m, prebehol Nolan za čas t_{Nolan} = 300 s. Preto za čas t = 3 s, ktorý je 100-krát kratší, by prebehol 100-krát menšiu dráhu. Teda pre vzdialenosť x, ktorú máme vypočítať, platí: $x = s$ / 100 = 4800 m / 100 = **48 m**. Preto **v okamihu, keď Monti prebehol cieľom, by sa Nolan nachádzal vo vzdialenosti 48 m pred cieľom.**

Správne odpovede: **a) 0,58 km/h** **b) 48 m**
Bodovanie: **2 body** za správnu odpoveď
2 body za hodnotu v intervale od 0,5816 do 0,582 v a)
1 bod za hodnotu v intervale od 0,57 do 0,59 v a)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

Pripomeňme si, od čoho závisí polohová energia telesa v gravitačnom poli Zeme. Ak máme teleso s hmotnosťou m, ktoré sa nachádza v určitej výške h nad povrchom Zeme, tak jeho polohová energia je $E_p = m{\cdot}g{\cdot}h$ (kde $g = 10$ N/kg). Ak sa toto teleso pohybuje tak, že sa výška, v ktorej sa práve nachádza, postupne zväčšuje (zmenšuje), tak sa podľa toho zväčšuje (zmenšuje) aj jeho polohová energia.

a) Keď voda (presnejšie nejaký „kus vody“) padá z povrchu priehradného jazera do rieky pod priehradou, jej hmotnosť sa nemení. Mení sa však výška, v ktorej sa nachádza v jednotlivých okamihoch počas pádu – postupne sa zmenšuje. Preto sa postupne zmenšuje aj jej polohová energia. **Polohová energia padajúcej vody sa zmenšuje.**

b) Označme si:
$V = 10\ m^3$.............................. objem padajúcej vody
m .... hmotnosť padajúcej vody
$\rho_{voda} = 1000\ kg/m^3$ .... hustota vody
$h = 45$ m .... výška, z ktorej voda padá
E_p .... polohová energia padajúcej vody vo výške, z ktorej padá

$10\ m^3$ vody má hmotnosť $m = \rho_{voda} \cdot V = 1000\ kg/m^3 \cdot 10\ m^3 = 10000$ kg. Preto jej polohová energia vo výške $h = 45$ m je $E_p = m{\cdot}g{\cdot}h = 10000\ kg \cdot 10\ N/kg \cdot 45\ m = 4500000\ J = 4500\ kJ$. Pri dopade, vo výške $h_0 = 0$ m, je polohová energia padajúcej vody nulová. To znamená, že počas pádu sa polohová energia vody zmenší o hodnotu $E_p = 4500$ kJ.
Polohová energia 10 m³ vody sa pri páde z výšky 45 m zmení o 4500 kJ.

Správne odpovede:	**a) A: zmenšuje**	**b) 4500 kJ**
Bodovanie:	**2 body** za správnu odpoveď	
	0 bodov za nesprávnu odpoveď	

③ Označme si:
$m = 500\ g = 0{,}5$ kg..................... hmotnosť zazátkovanej fľaše s dvoma listami papiera
$V = 0{,}95\ dm^3 = 0{,}00095\ m^3$ .... celkový objem zazátkovanej fľaše
V' .... objem ponorenej časti fľaše
$\rho = 1020\ kg/m^3$ .... hustota morskej vody $g = 10$ N/kg

Na fľašu plávajúcu na hladine mora pôsobí jednak gravitačná sila F_g v smere zvislo nadol, jednak vztlaková sila F_{vz} v smere zvislo nahor. Keď fľaša voľne pláva na hladine, sú tieto dve sily v rovnováhe, teda majú rovnakú veľkosť (platí $F_{vz} = F_g$).

a) Veľkosť vztlakovej sily môžeme vyjadriť pomocou Archimedovho zákona (ako veľkosť gravitačnej sily, ktorá by pôsobila na kvapalinu s rovnakým objemom, ako má ponorená časť fľaše): $F_{vz} = V' \cdot \rho \cdot g$. Pre veľkosť gravitačnej sily F_g zase platí $F_g = m \cdot g$. Ak sa veľkosti týchto dvoch síl rovnajú (teda platí rovnosť $V' \cdot \rho \cdot g = m \cdot g$), tak hmotnosť morskej vody, ktorá má rovnaký objem ako ponorená časť fľaše, je rovnaká ako hmotnosť fľaše; čiže platí rovnosť $V' \cdot \rho = m$. Z tejto rovnosti vieme vyjadriť neznámy objem ponorenej časti fľaše V' pomocou známej hmotnosti fľaše m a známej hustoty morskej vody ρ: $V' = m / \rho$.
Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme:
$V' = 0{,}5\ kg / 1020\ kg/m^3 = (1/2040)\ m^3 \approx 0{,}000490196\ m^3 = 0{,}490196\ dm^3$.
A aká časť (v percentách) z celkového objemu fľaše je ponorená vo vode? To vyjadruje podiel $(V' / V) \cdot 100\,\% = ((1/2040)\ m^3 / (0{,}00095\ m^3)) \cdot 100\,\% \approx 51{,}599587\,\% \approx$ **51,60 %**.
Vo vode je ponorených 51,60 % z celkového objemu fľaše.

b) Predstavme si, že by do fľaše natieklo určité množstvo morskej vody s objemom V_{mv}. Jej hmotnosť by bola $m_{mv} = \rho \cdot V_{mv}$, a potom celková hmotnosť fľaše (aj s touto vodou) by bola $m_{celk} = m + m_{mv} = m + \rho \cdot V_{mv}$. Na fľašu (s vodou vovnútri) by potom pôsobila gravitačná sila veľkosti $F_g = m_{celk} \cdot g = (m + m_{mv}) \cdot g = (m + \rho \cdot V_{mv}) \cdot g$. Vidíme, že čím viac vody do fľaše natečie, tým väčšia je gravitačná sila, ktorá na fľašu (s vodou vovnútri) pôsobí.
Ak má fľaša ďalej plávať na hladine, musí sa naďalej rovnať veľkosť vztlakovej sily F_{vz} veľkosti gravitačnej sily F_g. Keďže sa pri natekaní vody do fľaše veľkosť sily F_g zväčšuje, musí sa súčasne zväčšovať aj veľkosť sily F_{vz}. Vieme, že pre veľkosť sily F_{vz} platí $F_{vz} = V' \cdot \rho \cdot g$. Takže ak sa má zväčšiť sila F_{vz}, musí sa zväčšovať aj niektorá z veličín V' (objem ponorenej časti fľaše), ρ (hustota morskej vody), g (= 10 N/kg). Z týchto troch veličín sa však môže zväčšovať len objem ponorenej časti fľaše V', a aj to len dovtedy, kým nedosiahne celkový objem fľaše $V = 0{,}00095\ m^3$. Preto platí $V' \le V = 0{,}00095\ m^3$. Z toho dostaneme:
$F_{vz} = V' \cdot \rho \cdot g \le V \cdot \rho \cdot g = 0{,}00095\ m^3 \cdot 1020\ kg/m^3 \cdot g = 0{,}969\ kg \cdot g$, čiže $F_{vz} \le 0{,}969\ kg \cdot g$.
Takže aby fľaša ešte plávala na hladine, musí platiť $F_g = F_{vz} \le 0{,}969\ kg \cdot g$. Ale toto bude splnené len vtedy, keď bude celková hmotnosť fľaše (aj s vodou vovnútri) najviac 0,969 kg. Preto hmotnosť vody vovnútri m_{mv} (= $m_{celk} - m$) môže byť najviac $0{,}969\ kg - m = 0{,}969\ kg - 0{,}5\ kg = 0{,}469\ kg$. Objem tejto vody vovnútri je $V_{mv} = m_{mv} / \rho$, a to môže byť najviac
$0{,}469\ kg / \rho = 0{,}469\ kg / (1020\ kg/m^3) = 469\ g / (1{,}02\ g/cm^3) \approx 459{,}8039\ cm^3 \approx$ **459,80 ml**.
Aby fľaša plávala na hladine mora, môže sa do nej dostať najviac 459,8 ml vody.

Správne odpovede:	**a) 51,60 %**	**b) 459,80 ml**
Bodovanie:	**2 body** za správnu odpoveď	
	2 body za hodnotu v intervale od 51,599 do 51,60 v a)	
	2 body za hodnotu v intervale od 459,80 do 459,81 v b)	
	1 bod za hodnotu v intervale od 51,57 do 51,63 v a)	
	1 bod za hodnotu v intervale od 459,5 do 460,0 v b)	
	0 bodov za nesprávnu odpoveď	

④ **a)** Označme si:
$m_1 = 67{,}5$ kg .... priemerná hmotnosť jednej osoby v kabíne výťahu
$m_k = 450$ kg .... hmotnosť prázdnej kabíny výťahu
F .... sila, ktorou pôsobí ťažné zariadenie výťahu na kabínu s 8 osobami
$v = 2$ m/s................. rýchlosť kabíny výťahu pri jazde z 13. na 29. poschodie
$P = ?$....................... výkon ťažného zariadenia výťahu pri jazde z 13. na 29. poschodie

Ak je priemerná hmotnosť jednej osoby v kabíne výťahu $m_1 = 67{,}5$ kg, tak hmotnosť 8 osôb v kabíne výťahu je $m_8 = 8 \cdot m_1 = 8 \cdot 67{,}5\ kg = 540$ kg. Potom celková hmotnosť kabíny, v ktorej sa vezie 8 osôb, je $m_{celk} = m_k + m_8 = 450\ kg + 540\ kg = 990$ kg.
Na kabínu výťahu, v ktorej sa vezie 8 osôb, pôsobí v smere zvislo nadol gravitačná sila F_g, ktorej veľkosť je $F_g = m_{celk} \cdot g = 990\ kg \cdot 10\ N/kg = 9900$ N. Ak sa kabína pri jazde pohybuje rovnomerným pohybom, tak výsledná sila pôsobiaca na kabínu je nulová. Preto ťažné zariadenie musí pôsobiť na kabínu v smere zvislo nahor silou F, ktorej veľkosť je tiež 9900 N. Vďaka pôsobeniu ťažného zariadenia sa kabína výťahu pohybuje v smere zvislo nahor (teda v tom istom smere, ako na ňu pôsobí ťažné zariadenie silou $F = 9900$ N) stálou rýchlosťou $v = 2$ m/s. Preto výkon ťažného zariadenia pri tomto pohybe kabíny je
$P = F{\cdot}v = 9900\ N \cdot 2\ m/s = 19800\ W = 19{,}8\ kW$.
Výkon ťažného zariadenia výťahu pri tejto jazde bol 19,8 kW.

b) Pri jazde kabíny s 8 osobami z 13. na 29. poschodie vykonalo podľa zadania ťažné zariadenie výťahu mechanickú prácu $W = 594\ kJ = 594000$ J. Pre túto prácu platí: $W = P \cdot t$, kde P je výkon ťažného zariadenia pri tejto jazde a t je čas, za ktorý prešla kabína výťahu z 13. na 29. poschodie. Výkon P sme vypočítali v časti a), $P = 19800$ W. Preto môžeme vypočítať čas t: $t = W / P = 594000\ J / 19800\ W = 30$ s. Za tento čas prešla kabína výťahu