⑤ Zistime najprv, ako vyzeral pohyb mravca počas prvej sekundy. Zo zadania vieme, že:
– na začiatku prvej sekundy bola jeho okamžitá rýchlosť $v_0 = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
– počas prvej sekundy sa mravec pohyboval rovnomerne zrýchleným pohybom so stálym zrýchlením a_1, ktoré vypočítame;
– počas prvej sekundy sa mravec pohyboval priemernou rýchlosťou $v_{p1} = 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Posledná informácia nám vlastne hovorí o tom, že za prvú sekundu prebehol mravec dráhu $s_1 = 0{,}8$ m ($v_{p1} = 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = s_1 / 1\mathrm{s}$). Pre túto dráhu však platí aj vzťah $s_1 = 0{,}5 \cdot a_1 \cdot t_1^2$, nakoľko mravec ju prešiel rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením a_1 za čas $t_1 = 1$ s. Takto sa môžeme dostať až k zrýchleniu a_1: $0{,}8\ \mathrm{m} = 0{,}5 \cdot a_1 \cdot (1\mathrm{s})^2$; $0{,}8\ \mathrm{m} = 0{,}5\ \mathrm{s}^2 \cdot a_1$; $a_1 = 0{,}8\ \mathrm{m} / (0{,}5\ \mathrm{s}^2) = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Teraz ľahko zistíme aj to, akú okamžitú rýchlosť mal mravec na konci prvej sekundy: $v_1 = a_1 \cdot t_1 = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 1\mathrm{s} = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Podobným postupom vyšetríme pohyb mravca aj počas druhej, tretej, štvrtej a piatej sekundy. Aby sme však nemuseli 4-krát opakovať tie isté úvahy, urobíme ich všeobecne. Podľa zadania sa mravec pohyboval počas k-tej sekundy (k = 2, 3, 4, 5) rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením a_k, ktoré vypočítame, tak, že jeho priemerná rýchlosť bola: počas druhej sekundy $v_{p2} = 1{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, počas tretej sekundy $v_{p3} = 2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, počas štvrtej sekundy $v_{p4} = 3{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a počas piatej sekundy $v_{p5} = 4{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Z toho vieme vypočítať, akú dráhu s_k mravec počas k-tej sekundy prebehol: Platí $v_{pk} = s_k / 1\mathrm{s}$, a preto je $s_k = v_{pk} \cdot 1\mathrm{s}$, čiže máme: $s_2 = 1{,}8$ m, $s_3 = 2{,}8$ m, $s_3 = 3{,}8$ m a $s_4 = 4{,}8$ m.
Už sme zistili, že na konci prvej sekundy (a teda aj na začiatku druhej sekundy) bola okamžitá rýchlosť mravca $v_1 = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Preto vieme napísať vzťah pre dráhu s_2, ktorú mravec prebehol rovnomerne zrýchleným pohybom počas druhej sekundy (teda za čas t_2 = 1s):
$s_2 = v_1 \cdot t_2 + 0{,}5 \cdot a_2 \cdot t_2^2$. V tomto vzťahu je jedinou neznámou zrýchlenie a_2, ktoré postupne vyjadríme: $0{,}5 \cdot a_2 \cdot t_2^2 = s_2 - v_1 \cdot t_2$ a $a_2 = (s_2 - v_1 \cdot t_2) / (0{,}5 \cdot t_2^2)$. Potom môžeme vyjadriť aj rýchlosť v_2, ktorú mal mravec na konci druhej sekundy: $v_2 = v_1 + a_2 \cdot t_2$.
Po dosadení číselných hodnôt $t_2 = 1$ s, $s_2 = 1{,}8$ m a $v_1 = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ dostaneme:
$a_2 = (1{,}8\ \mathrm{m} - 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1\ \mathrm{s}) / (0{,}5 \cdot (1\mathrm{s})^2) = (1{,}8\ \mathrm{m} - 1{,}6\ \mathrm{m}) / (0{,}5\ \mathrm{s}^2) = \ldots = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
a z toho potom $v_2 = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} + 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 1\mathrm{s} = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} + 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Rovnakým postupom vyjadríme z už známych veličín $s_3 = 2{,}8$ m, $v_2 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $t_3 = 1$ s zrýchlenie a_3: $a_3 = (s_3 - v_2 \cdot t_3) / (0{,}5 \cdot t_3^2) = (2{,}8\ \mathrm{m} - 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1\ \mathrm{s}) / (0{,}5 \cdot (1\mathrm{s})^2) = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
a pomocou neho potom rýchlosť v_3, ktorú mal mravec na konci tretej sekundy:
$v_3 = v_2 + a_3 \cdot t_3 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} + 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 1\mathrm{s} = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
A opäť tým istým postupom vyjadríme pomocou veličín $s_4 = 3{,}8$ m, $v_3 = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a t_4 = 1s zrýchlenie a_4: $a_4 = (s_4 - v_3 \cdot t_4) / (0{,}5 \cdot t_4^2) = (3{,}8\ \mathrm{m} - 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1\ \mathrm{s}) / (0{,}5 \cdot (1\mathrm{s})^2) = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
a pomocou neho potom rýchlosť v_4, ktorú mal mravec na konci štvrtej sekundy:
$v_4 = v_3 + a_4 \cdot t_4 = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} + 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 1\mathrm{s} = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Nakoniec vyjadríme pomocou veličín $s_5 = 4{,}8$ m, $v_4 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $t_5 = 1$ s zrýchlenie a_5:
$a_5 = (s_5 - v_4 \cdot t_5) / (0{,}5 \cdot t_5^2) = (4{,}8\ \mathrm{m} - 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1\ \mathrm{s}) / (0{,}5 \cdot (1\mathrm{s})^2) = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
a pomocou neho potom rýchlosť v_5, ktorú mal mravec na konci piatej sekundy:
$v_5 = v_4 + a_5 \cdot t_5 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} + 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 1\mathrm{s} = 5{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Ak porovnáme hodnoty zrýchlení a_1 až a_5, ktoré sme postupne vypočítali, zistíme, že **najväčšie zrýchlenie mravca bolo 1,6 m·s⁻².**

b) Vypočítali sme, že **na konci piatej sekundy bola okamžitá rýchlosť mravca 5,6 m·s⁻¹.**

Správne odpovede: **a) 1,6 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$** **b) 5,6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$**
Bodovanie: **2 body** za správnu odpoveď
0 bodov za nesprávnu odpoveď

kategória **S3** fyzIQ
2005 / 2006

Vzorové riešenia

2. séria pre žiakov 3. a 4. ročníka SŠ a septimy a oktávy OG

①

a) Označme si:
s = 100 m.. .... vzdialenosť automobilu od prekážky v momente, keď začal brzdiť
v_0 = 90 km/h ..... rýchlosť automobilu pred zaregistrovaním prekážky
v_1 = 20 km/h ..... rýchlosť automobilu v momente zrážky
Δv .... rozdiel rýchlostí automobilu pred a po brzdením
a .... zrýchlenie automobilu počas celej doby brzdenia
t .... čas, ktorý sa automobil pohyboval rovnomerne spomaleným pohybom

Aby sme mohli vypočítať veľkosť zrýchlenia automobilu, potrebujeme poznať, ako sa zmenila rýchlosť automobilu a za aký čas táto zmena nastala. Toto vyplýva zo vzťahu $a = \Delta v / t$, kde a je zrýchlenie automobilu, Δv je zmena rýchlosti automobilu, ktorá nastala za čas t.
Zatiaľ čo zmenu rýchlostí si dokážeme vypočítať ako rozdiel rýchlostí pred a po brzdení, to je $\Delta v = v_0 - v_1$, doba brzdenia je u nás neznámou. Veľmi dôležitým údajom pre nás je dráha, ktorú automobil prešiel rovnomerne spomaleným pohybom. Túto si musíme najprv vyjadriť všeobecne ako $s = v_0 \,.\, t - 0{,}5 \,.\, a \,.\, t^2$, kde s je nám známa dráha, v_0 je rýchlosť na začiatku pohybu, a je veľkosť zrýchlenia a t je dĺžka trvania tohto pohybu.
Zo vzťahu pre výpočet zrýchlenia ($a = \Delta v / t$) si môžme vyjadriť čas: $t = \Delta v / a$
Po dosadení do vzťahu pre výpočet dráhy tohto pohybu dostaneme
$s = v_0 \,.\, (\Delta v / a) - 0{,}5 \,.\, a \,.\, (\Delta v / a)^2 = (v_0 \,.\, \Delta v) / a - 0{,}5 \,.\, \Delta v^2 / a = (v_0 \,.\, \Delta v - 0{,}5 \,.\, \Delta v^2) / a$
Ak obe strany rovnice vynásobíme podielom a / s, dostaneme vzťah pre výpočet zrýchlenia
$a = (v_0 \,.\, \Delta v - 0{,}5 \,.\, \Delta v^2) / s$
Pritom zmenu rýchlosti si dokážeme vyjadriť ako $\Delta v = v_0 - v_1$, po dosadení dostaneme
$a = (v_0 \,.\, (v_0 - v_1) - 0{,}5 \,.\, (v_0 - v_1)^2) / s$
V tomto vzťahu už poznáme všetky premenné: v_0= 90 km/h = (90 / 3,6) m/s je rýchlosť na začiatku pohybu a v_1= 20 km/h = (90 / 3,6) m/s je rýchlosť na jeho konci, pričom s = 100 m je dráha, ktorú automobil týmto pohybom prešiel. Takže postupnými úpravami dostaneme:
$a = (v_0 \,.\, (v_0 - v_1) - 0{,}5 \,.\, (v_0 - v_1)^2) / s = (v_0^2 - v_0 v_1) - 0{,}5 \,.\, (v_0^2 - 2 \,.\, v_0 \,.\, v_1 + v_1^2)) / s$
$a = (v_0^2 - v_0 v_1 - 0{,}5 \,.\, v_0^2 + v_0 \,.\, v_1 - 0{,}5 \,.\, v_1^2) / s = (0{,}5 \,.\, v_0^2 - 0{,}5 \,.\, v_1^2) / s = (v_0^2 - v_1^2) / 2 \,.\, s$
Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme
$a = ((90\ \mathrm{km/h})^2 - (20\ \mathrm{km/h})^2) / 2 \,.\, 100\ \mathrm{m} = (((90 / 3{,}6)\ \mathrm{m/s})^2 - ((20 / 3{,}6)\ \mathrm{m/s})^2) / 2 \,.\, 100\ \mathrm{m} =$
$= ((8100 / (3{,}6)^2\ \mathrm{m^2/s^2}) - (400 / (3{,}6)^2\ \mathrm{m^2/s^2})) / 200\ \mathrm{m} = ((8100 - 400) / (3{,}6)^2\ \mathrm{m^2/s^2}) / 200\ \mathrm{m}$
$= (7700 / (3{,}6)^2\ \mathrm{m^2/s^2}) / 200\ \mathrm{m} = 2{,}97067\ \mathrm{m/s^2} \approx$ **2,97 m·s⁻².**
Zrýchlenie automobilu počas brzdenia malo veľkosť 2,97 m·s⁻².

b) Ďalej si označme:
s_b ….................. brzdná dráha automobilu pri rýchlosti 90 km/h
v_b = 0 km/h .... rýchlosť automobilu na konci brdznej dráhy
Δv_b.................... zmena rýchlosti automobilu pri úplnom zabrzdení
t_b .... čas potrebný na ubrzdenie automobilu

Ak by vodič brzdil rovnako intenzívne a zastal by tesne pred prekážkou, prešiel by dráhu rovnú brzdnej dráhe automobilu. Pre výpočet tejto dráhy platí vzťah $s_b = v_0 \,.\, t_b - 0{,}5 \,.\, a \,.\, t_b^2$. Tiež už vieme, že čas t_b potrebný na ubrzdenie automobilu vypočítame ako podiel veľkosti zmeny rýchlosti automobilu Δv_b a veľkosti jeho zrýchlenia, $t_b = \Delta v_b / a$

Veľkosť zmeny rýchlosti automobilu Δv_b vypočítame ako rozdiel rýchlosti automobilu na začiatku brzdenia v_0 = 90 km/h a na konci brzdenia v_b = 0 km/h. Nakoľko je ale rýchlosť na konci pohybu nulová, platí $\Delta v_b = v_0 - v_b$ = 90 km/h - 0 km/h $_b$ = 90 km/h a tiež $\Delta v_b = v_0$. Potom platí aj $t_b = \Delta v_b / a = v_0 / a$.

Do vzťahu pre výpočet brzdnej dráhy dosadíme vzťah pre výpočet času potrebného na ubrzdenie automobilu a dostaneme:

$s_b = v_0 \,.\, (v_0 / a) - 0{,}5 \,.\, a \,.\, (v_0 / a)^2 = v_0^2 / a - 0{,}5 \,.\, v_0^2 / a = 0{,}5 \,.\, v_0^2 / a = v_0^2 / 2 \,.\, a$

Kvôli presnosti si dosaďme za zrýchlenie a vzťah, pomocou ktorého sme ho v a) vyjadrili, $a = (v_0^2 - v_1^2) / 2 \,.\, s$ Tak dostaneme vyjadrenie pre brzdnú dráhu:

$s_b = v_0^2 / 2 \,.\, a = v_0^2 / 2 \,.\, (v_0^2 - v_1^2) / 2 \,.\, s = 2 \,.\, s \,.\, v_0^2 / 2 \,.\, (v_0^2 - v_1^2) = s \,.\, v_0^2 / (v_0^2 - v_1^2)$

Nakoniec sme zistili, že brzdná dráha automobilu bude $(v_0^2 / (v_0^2 - v_1^2))$-krát väčšia než pôvodná dráha, na ktorej vodič brzdil pred zrážkou. Dosadíme zadané číselné hodnoty:

s_b = 100 m . (90 km/h)^2 / ((90 km/h)^2 - (20 km/h)^2) = 100 m . 90^2 / (90^2 - 20^2) = 100 m . 8100 / (8100 - 400) = 100 m . 8100 / 7700 = 100 m . 8100 / 7700 = 105,1948 m ≈ **105,19 m.**

Vodič by musel začať brzdiť vo vzdialenosti 105,19 m pred prekážkou.

Správne odpovede:	**a) 2,97 m·s^{-2}**	**b) 105,19 m**
Bodovanie:	**2 body** za správnu odpoveď	
	2 body za hodnotu v intervale od 2,97 do 2,971 v a)	
	2 body za hodnotu v intervale od 105,18 do 105,22 v b)	
	1 bod za hodnotu v intervale od 2,96 do 2,98 v a)	
	1 bod za hodnotu v intervale od 105,0 do 105,4 v b)	
	0 bodov za nesprávnu odpoveď	

② **a)** Označme si:

t_Z = ?................ čas, za ktorý vedro dopadlo na zem

h_0 = 15 m.. .... výška, v ktorej sa nachádzalo vedro, keď sa lano pretrhlo

v_0 = 0,5 m·s^{-1} .... rýchlosť vedra v smere nahor do okamihu, keď sa lano pretrhlo

g = 9,8 m·s^{-2} ..... gravitačné zrýchlenie

Pre správne vyriešenie tejto úlohy je najdôležitejšie pochopiť, aký pohyb vedro konalo po pretrhnutí lana. Keby sa vedro na začiatku pádu nepohybovalo, tak by padalo rovnomerne zrýchleným pohybom, pričom pre výšku h, v ktorej by sa nachádzalo v nejakom čase t, by platilo $h = h_0 - 0{,}5 \cdot g \cdot t^2$. Vieme ale, že v momente, keď sa lano pretrhlo, sa vedro pohybovalo smerom zvislo nahor rýchlosťou v_0 = 0,5 m·s^{-1}. Preto pohyb padajúceho vedra bude zložený, a to z voľného pádu z výšky h_0 a z rovnomerného pohybu v smere zvislo nahor rýchlosťou v_0 = 0,5 m·s^{-1}. V takom prípade pre výšku h, v ktorej by sa vedro nachádzalo v nejakom čase t, platí $h = h_0 - 0{,}5 \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$.

V našej úlohe je situácia obrátená: výšku, v ktorej by sa vedro malo nachádzať po určitom čase, poznáme (malo by dopadnúť na zem, h = 0 m), no nevieme, v akom čase t to bude. Hľadaný čas t_Z bude však jedným koreňom rovnice $0 = h_0 - 0{,}5 \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$, resp. (pre zadané číselné hodnoty) koreňom rovnice $0 = 15 - 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot t^2 + 0{,}5 \cdot t$. Táto kvadratická rovnica má dva korene: $t_{1,2} = (-v_0 \pm (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2}) / (-g)$, resp. pre zadané číselné hodnoty sú to korene $t_{1,2} = (-0{,}5 \pm (0{,}25 + 30 \cdot 9{,}8)^{1/2}) / (-9{,}8)$, pričom jeden z nich je kladný a druhý záporný. Pre našu úlohu má zmysel len kladný koreň, a to je

t_Z = ((0,5 + (294,25)$^{1/2}$) / 9,8) s ≈ 1,8014 s ≈ **1,80 s**.

Vedro dopadlo na zem za 1,80 s od pretrhnutia lana.

b) Už vieme, že počas pádu sa rýchlosť vedra v smere nadol rovnomerne zvyšovala. Ak by vedro malo na začiatku pádu nulovú rýchlosť, tak v čase t_Z by malo rýchlosť $v = g \cdot t_Z$ v smere nadol. Ak však malo vedro na začiatku rýchlosť v_0 v smere nahor, čiže akoby $-v_0$ v smere nadol, tak pri dopade v čase t_Z bude jeho rýchlosť v_Z v smere nadol o v_0 menšia: $v_Z = g \cdot t_Z - v_0$. Keďže čas t_Z sme už vyjadrili v časti a), môžeme teraz vyjadriť rýchlosť v_Z:

$v_Z = g \cdot t_Z - v_0 = g \cdot (-v_0 \pm (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2}) / (-g) - v_0 = v_0 \pm (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2} - v_0 =$
$= \pm (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_0)^{1/2}$, pričom pre rýchlosť v smere nadol má zmysel kladné znamienko.

Pri počítaní s konkrétnymi číselnými hodnotami dostaneme:

v_Z = 9,8 m·s^{-2} · ((0,5 + (294,25)$^{1/2}$) / 9,8) s – 0,5 m·s^{-1} = ... = (294,25)$^{1/2}$ m·s^{-1} ≈ **17,15 m·s^{-1}**.

Vedro dopadlo na zem rýchlosťou 17,15 m·s^{-1}.

Správne odpovede:	**a) 1,80 s**	**b) 17,15 m·s^{-1}**
Bodovanie:	**2 body** za správnu odpoveď	
	2 body za hodnotu v intervale od 1,80 do 1,803 v a)	
	2 body za hodnotu v intervale od 17,14 do 17,16 v b)	
	0 bodov za nesprávnu odpoveď	

③ **a)** Označme si:

R = ?.............. Miškov odpor

R_{celk} = 80 Ω ... celkový odpor obvodu medzi bodmi A a C, keď sú uzly B a D vodivo spojené

$R_{x\text{-}y}$ .... odpor obvodu medzi uzlami x a y

Pripomeňme si, že: – výsledný odpor sériovo zapojených rezistorov (napr. R_1 a R_2) sa rovná súčtu ich odpo-rov ($R_{sér} = R_1 + R_2$);

– prevrátená hodnota výsledného odporu paralelne zapojených rezistorov (napr. R_3 a R_4) je súčet prevrátených hodnôt ich odporov ($1/R_{par} = 1/R_3 + 1/R_4$); keď tento vzťah upravujeme, dostaneme, že $1/R_{par} = (R_4 + R_3) / (R_3 \cdot R_4)$ a z toho $R_{par} = (R_3 \cdot R_4) / (R_4 + R_3)$.

A teraz konkrétne pre náš prípad. Keď Miško spojil vodičom body D a B, akoby ich stotožnil (lebo predpokladáme, že vodič má nulový odpor, a teda elektróny sa môžu voľne pohybovať medzi bodmi B a D). Ale to radikálne zmenilo zapojenie, lebo medzi uzlom A a uzlom, ktorý vznikol spojením bodov B a D (označme si ho X) má obvod taký istý odpor ako medzi uzlami X a C ($R_{a\text{-}x} = R_{x\text{-}c}$); a navyše sú tieto dve časti spojené do série, takže platí: $R_{celkový} = R_{a\text{-}x} + R_{x\text{-}c} = 2 \cdot R_{a\text{-}x}$). Stačí už len zistiť, aký má odpor jedna táto časť. Ale to vieme vypočítať, lebo obsahuje odpory R a 2R, ktoré sú zapojené paralelne, a teda $1/R_{a\text{-}x} = 1/R + 1/(2R)$. Takže platí: $R_{celkový} = 2 \cdot R_{a\text{-}x} = 2 \cdot (R \cdot 2R)/(R+2R) = (4/3) \cdot R$. To sa však podľa zadania rovná 80Ω. Keď si z tejto rovnice vyjadríme R, dostaneme R = (3.80/4) Ω = **60 Ω**.

Miškov odpor R má hodnotu 60 Ω.

b) Ponechajme si označenie z časti a), akurát sa bude teraz vzťahovať na prípad, keď uzly B a D nie sú vodivo spojené. V tomto prípade sú odpory R a 2R zapojené ako na schéme zo zadania, teda R a 2R sériovo (čiže R+2R=3R) na vetve A-D-C aj na vetve A-B-C, a tieto vetvy sú vzhľadom na seba zapojené paralelne. Potom je

$R_{celkový}$ = (3R·3R) / (3R+3R) = 9R/6 = **90 Ω**.

Odpor Miškovho obvodu medzi bodmi A a C je 90 Ω.

Správne odpovede:	**a) 60 Ω**	**b) 90 Ω**
Bodovanie:	**2 body** za správnu odpoveď	
	0 bodov za nesprávnu odpoveď	

④ Vzorové riešenie a bodovanie tejto úlohy sa nachádza na samostatnom liste.

④ **a)** Označme si:

c_{Au} = 0,130 kJ/ (kg . ℃) .... merná tepelná kapacita zlata
c_{Ag} = 0,235 kJ/ (kg . ℃) .... merná tepelná kapacita striebra
c_{bronz} = 0,430 kJ/ (kg . ℃).. ... merná tepelná kapacita bro nzu
V.. objem jednej medaily
ρ_{Au} = 19300 kg/m^3................. hustota zlata
ρ_{Ag} = 10500 kg/m^3................. hustota striebra
ρ_{bronz} = 7600 kg/m^3................ hustota bronzu
t_1 = 8℃ .... teplota medailí keď boli v jaskyni
t_2 = 22℃ .... teplota medailí po vynesení z jaskyne

Vieme, že všetky tri medaile prijali určité teplo keď ich Bili vyniesol z jaskyne. Toto teplo je úmerné tepelnej kapacite jednotlivých medailí a zmene teploty medailí, inak zapísané $Q = C \,.\, \Delta t$. Nakoľko počiatočné a výsledné teploty všetkých medailí sa rovnajú (teplotný rozdiel je pre všetky medaile rovnaký a výsledok nám neovplyvní), stačí nám zistiť, ktorá medaila má najväčšiu tepelnú kapacitu. Vieme, že tepelnú kapacitu každej medaily vypočítame ako súčin jej mernej tepelnej kapacity a jej hmotnosti, teda $C = c \,.\, m$. Hmotnosti jednotlivých medailí síce nepoznáme, ale poznáme ich hustotu a to, že objem všetkých medailí je rovnaký. Preto pre tepelné kapacity jednotlivých medailí vypočítame ako:
$C_{Au} = c_{Au} \,.\, \rho_{Au} \,.\, V$ = 0,130 kJ/ (kg . ℃) . 19300 kg/m^3 . V = 2509 kJ/ (m^3. ℃) . V
$C_{Ag} = c_{Ag} \,.\, \rho_{Ag} \,.\, V$ = 0,235 kJ/ (kg . ℃) . 10500 kg/m^3 . V = 2467,5 kJ/ (m^3. ℃) . V
$C_{bronz} = c_{bronz} \,.\, \rho_{bronz} \,.\, V$ = 0,43 kJ/ (kg . ℃) . 7600 kg/m^3 . V = 3268 kJ/ (m^3. ℃) . V
Objem všetkých troch medilí je rovnaký, takže pri porovnávaní nám neovplyvní výsledok. Tepelná kapacita **bronzovej medaily** bude vždy najväčšia spomedzi týchto troch medailí a preto pri rovnakej zmene teploty prijme najviac tepla.

b)
Aby sme mohli vypočítať, akú hmotnosť mala najťažšia medaila, musíme najprv zistiť, ktorá medaila bude najťažšia. To je pomerne jednoduché nakoľko všetky tri medaily majú rovnaký objem. Najväčšiu hmotnosť bude mať medaila s najväčšou hustotu, teda zlatá medaila.
Pomocou tepla, ktoré prijala strieborná medaila dokážeme určiť objem streibornej a teda aj zlatej medaily. Už sme si odvodili, že teplo, ktoré prijala strieborná medaila, môžeme vyjadriť pomocou vzťahu $Q = c_{Ag} \,.\, \rho_{Ag} \,.\, V \,.\, \Delta t$, kde teplotný rozdiel vypočítame ako
$\Delta t = t_2 - t_1$ = 22 ℃ – 8 ℃ = 14 ℃.
Objem medaily teda môžeme vyjadriť ako $V = Q_{Ag} / c_{Ag} \,.\, \rho_{Ag} \,.\, \Delta t$.
Teraz nám už len stačí dosadiť vzťah pre výpočet objemu medaily do vzťahu pre výpočet hmotnosti zlatej medaily. Dostaneme:
$m_{Au} = \rho_{Au} \,.\, V = \rho_{Au} \,.\, Q_{Ag} / (c_{Ag} \,.\, \rho_{Ag} \,.\, \Delta t)$ =
= (19300 kg/m^3 . 304 J) / (235 J/ (kg . ℃) . 10500 kg/m^3 . 14℃)
= 0,1698422 kg ≈ **169,84 g**
Najťažšia medaila mala hmotnosť 169,84 g.

Správne odpovede:	**a) C: bronzová**	**b) 169,84 g**
Bodovanie:	**2 body** za správnu odpoveď	
	2 body za hodnotu v intervale od 169,84 do 169,85 v b)	
	1 bod za hodnotu v intervale od 169,7 do 170,0 v b)	
	0 bodov za nesprávnu odpoveď	