

Teraz už vieme vypočítať výšku h_0 : dosadením do „vzorca“ $E_{p0} = m \cdot g \cdot h_0$ dostaneme $0,84 \text{ J} = 0,06 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot h_0$ a z toho $h_0 = 0,84 \text{ J} / (0,06 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg}) = 1,4 \text{ m} = 140 \text{ cm}$. To znamená, že **hekisek padal na zem z výšky 140 cm nad zemou.**

Správne odpovede: a) 35 cm b) 140 cm
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤

a) Z grafu, ktorý bol uvedený v zadaní úlohy, vidíme, že počas prvých dvoch minút jazdy sa rýchlosť vlaku zväčšovala (vlak sa rozbiehal); počas ďalších 2,5 minúty sa vlak pohyboval stálou rýchlosťou $v = 90 \text{ km/h}$ – vtedy bol jeho pohyb rovnomerný; a poslednú minútu jazdy sa rýchlosť vlaku znižovala (vlak brzdil). To znamená, že rovnomerným pohybom prešiel vlak takú dráhu s , akú prešiel za čas

$$t = 2,5 \text{ min} = (2,5 \cdot 60) \text{ s} = 150 \text{ s}$$

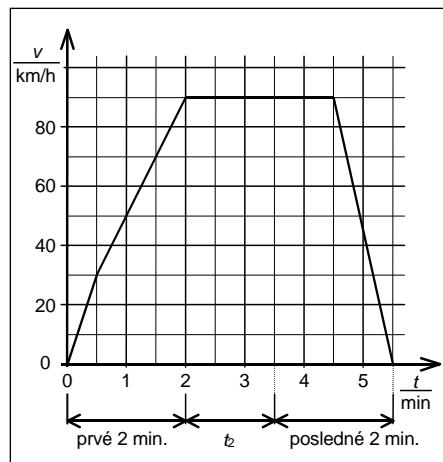
rýchlosťou

$$v = 90 \text{ km/h} = (90 : 3,6) \text{ m/s} = 25 \text{ m/s.}$$

Túto dráhu vypočítame:

$$s = v \cdot t = 25 \text{ m/s} \cdot 150 \text{ s} = 3750 \text{ m}$$

Rovnomerným pohybom prešiel osobný vlak dráhu 3750 m.



b) Priemernú rýchlosť osobného vlaku pri jazde medzi dvoma stanicami vypočítame tak, že vydělíme celkovú dráhu s , ktorú prešiel vlak medzi týmito dvoma stanicami, celkovým časom t , za ktorý vlak túto dráhu prešiel.

Z grafu uvedeného v zadaní úlohy vidíme, že jazda vlaku medzi tými dvoma stanicami trvala 5,5 min. Podľa zadania (textu) úlohy, vlak prešiel za prvé dve minúty dráhu $s_1 = 1660 \text{ m}$ a za posledné dve minúty dráhu $s_3 = 2250 \text{ m}$. Musíme teda ešte vypočítať, akú dráhu s_2 prešiel vlak medzi tým. Jedná sa o dráhu, ktorú prešiel vlak za čas $t_2 = 1,5 \text{ min} = 90 \text{ s}$, keď sa pohyboval rovnomerným pohybom rýchlosťou $v = 90 \text{ km/h} = (90 : 3,6) \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$. Túto dráhu s_2 vypočítame: $s_2 = v \cdot t_2 = 25 \text{ m/s} \cdot 90 \text{ s} = 2250 \text{ m}$.

Preto celková dráha, ktorú prešiel vlak medzi tými dvoma stanicami, je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 1660 \text{ m} + 2250 \text{ m} + 2250 \text{ m} = 6160 \text{ m}$$

a vlak ju prešiel za čas $t = 5,5 \text{ min} = 330 \text{ s}$.

Teraz už môžeme vypočítať priemernú rýchlosť vlaku medzi týmito dvoma stanicami:

$$v_p = s / t = 6160 \text{ m} / 330 \text{ s} = 18 \frac{2}{3} \text{ m/s} = ((56/3) \cdot 3,6) \text{ km/h} = 67,2 \text{ km/h.}$$

Priemerná rýchlosť osobného vlaku medzi týmito dvoma stanicami bola 67,2 km/h.

Správne odpovede: a) 3750 m b) 67,2 km/h

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 2 body za hodnotu v v intervale od 66,815 do 66,82 v b)
 1 bod za hodnotu v v intervale od 67,15 do 67,25 v b)
 1 bod za hodnotu v v intervale od 66,80 do 66,83 v b)
 1 bod za hodnotu v v intervale od 58,64 do 58,655 v b)
 0 bodov za nesprávnu odpoveď



kategória **K**

fyzIQ

2005/2006

Vzorové riešenia

2. séria pre žiakov kvarty OG

①

V zadaní tejto úlohy omylom vypadla jedna veta, v dôsledku čoho sa časť a) nedala úplne vyriešiť. Ukážeme preto najprv riešenie časti b).

b) Označme si:

$m_k = 100 \text{ kg}$ hmotnosť kabíny výtahu

$m_z = 200 \text{ kg}$ hmotnosť závažia zaveseného na druhom konci lana

$m_B = 58 \text{ kg}$ hmotnosť Bruna

Keď sa Bruno vezie vo výtahu, pôsobí na jeden koniec lana kabína s Brunom silou $F_{kB} = (m_k + m_B) \cdot g = (100 \text{ kg} + 58 \text{ kg}) \cdot 10 \text{ N/kg} = 1580 \text{ N}$ a na druhý koniec lana závažie silou $F_z = m_z \cdot g = 200 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 2000 \text{ N}$. Okrem toho pôsobí na lano kladka, cez ktorú je lano prevesené. Kladka je spojená s motorom výtahu a zabezpečuje pohyb výtahu v požadovanom smere. Preto musí pôsobiť na lano takou silou F , aby boli sily, ktoré pôsobia na lano, v rovnováhe (v opačnom prípade by buď kabína alebo závažie spadli na spodok výtahovej šachty). V našom prípade to znamená, že musí pôsobiť na lano v tom smere, v ktorom naňho pôsobí kabína s Brunom, pričom pre veľkosť sily F platí $F = F_z - F_{kB} = 2000 \text{ N} - 1580 \text{ N} = 420 \text{ N}$.

Keď sa Bruno vezie vo výtahu hore, závažie na druhom konci lana klesá dolu. Pohyb celej sústavy (kabína s Brunom, lano, závažie) sa teda koná v smere, v ktorom pôsobí sila F_z , čiže v opačnom smere než pôsobia sily F_{kB} a F . Preto motor výtahu, ktorý posobí na lano prostredníctvom kladky silou F v opačnom smere než ako sa lano pohybuje, mechanickú prácu v tomto prípade nekoná. (Prácu potrebnú na vyvezenie kabíny s Brunom z prízemnia na 8. poschodie vykoná závažie, ktoré sa pri tom presunie o 8 poschodí nižšie.)

V tomto prípade vykoná motor výtahu mechanickú prácu 0 J.

a) Tá veta, ktorá omylom zo zadania úlohy vypadla, znie: "Predpokladajte, že medzi prízemím a 8. poschodím prejde kabína výtahu v zvislom smere dráhu 24 m." Ukážeme, ako by sa dala úloha riešiť, keby v nej táto veta bola.

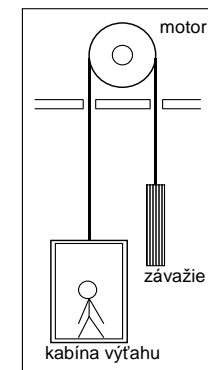
Princíp riešenia je podobný ako v časti b). Okrem už použitého označenia si označme ešte:

$m_D = 60 \text{ kg}$ hmotnosť Ďura

$m_A = 48 \text{ kg}$ hmotnosť Aničky

$s = 24 \text{ m}$ dráha, ktorú prejde kabína výtahu medzi prízemím a 8. poschodím

Keď sa vezie vo výtahu hore Ďuro s Aničkou, pôsobí na jeden koniec lana kabína s cestujúcimi silou $F_{kDA} = (m_k + m_D + m_A) \cdot g = (100 \text{ kg} + 60 \text{ kg} + 48 \text{ kg}) \cdot 10 \text{ N/kg} = 2080 \text{ N}$ a na druhý koniec lana závažie silou $F_z = m_z \cdot g = 200 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 2000 \text{ N}$. Na to, aby bolo lano v tomto prípade v rovnováhe, musí naňho pôsobiť motor prostredníctvom kladky silou $F_1 = 2080 \text{ N} - 2000 \text{ N} = 80 \text{ N}$ v smere, v ktorom naňho pôsobí sila F_z . Ak ide kabína hore, závažie klesá dole a pohyb celej sústavy sa koná v smere pôsobenia síl F_z a F_1 . Pri jazde na 8. poschodie prejde v tomto smere kabína (aj lano, aj závažie) dráhu $s = 24 \text{ m}$, a preto v tomto prípade vykoná motor výtahu mechanickú prácu $W_1 = F_1 \cdot s = 80 \text{ N} \cdot 24 \text{ m} = 1920 \text{ J}$.



Keď je kabína prázdna, pôsobí na lano silou $F_k = m_k \cdot g = 100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 1000 \text{ N}$. Závažie stále pôsobí na lano silou $F_z = 2000 \text{ N}$, a preto motor výťahu musí teraz pôsobiť na lano (prostredníctvom kladky) silou $F_2 = 2000 \text{ N} - 1000 \text{ N} = 1000 \text{ N}$ v rovnakom smere, ako pôsobí sila F_k . Ak ide kabína dole, závažie stúpa hore a pohyb celej sústavy sa koná v smere pôsobenia síl F_k a F_2 . V tomto smere prešla prázdna kabína výťahu tú istú dráhu $s = 24 \text{ m}$, no motor výťahu vykonal pri tom mechanickú prácu $W_2 = F_2 \cdot s = 1000 \text{ N} \cdot 24 \text{ m} = 24000 \text{ J}$.

Ak porovnáme mechanickú prácu W_1 a W_2 , ktorú vykonal motor výťahu v uvedených dvoch prípadoch, zistíme, že $W_2 > W_1$ a $W_2 - W_1 = 24000 \text{ J} - 1920 \text{ J} = 22080 \text{ J}$. Čiže **keď ide prázdna kabína z 8. poschodia dole na prízemie, vykonal motor výťahu o 22080 J väčšiu mechanickú prácu, ako keď sa Anička a Ďuro vezú vo výťahu z prízemie na 8. poschodie.**

Správne odpovede: a) A: o 22080 J väčšiu b) 0 J
Bodovanie: Vzhľadom na neúplné zadanie tejto úlohy, rozhodli sme sa udeliť za ňu **4 body** všetkým súťažiacim, ktorí nám poslali svoje riešenia v stanovenom termíne.

②

a) Označme si:

$P_1 = 60 \text{ W}$ priemerný výkon jedného otroka pri ťahaní saní
 $n = 20$ počet otrokov, ktorí ťahali sane
 P celkový výkon všetkých otrokov spolu pri ťahaní saní
 $v = 2,7 \text{ km/h} = 0,75 \text{ m/s}$ rýchlosť, ktorou sa otroci a sane pohybovali
 $F = ?$ sila, ktorá pôsobila na sane v smere, v ktorom sa pohybovali

To, že priemerný výkon jedného otroka pri ťahaní saní bol $P_1 = 60 \text{ W}$, znamená, že všetci otroci spolu mali pri ťahaní taký výkon P , aký by mali, keby každý z nich mal výkon presne $P_1 = 60 \text{ W}$. (Výkon konkrétnych jednotlivých otrokov mohol byť pritom v skutočnosti iný.)

Takže celkový výkon otrokov pri ťahaní saní bol $P = n \cdot P_1 = 20 \cdot 60 \text{ W} = 1200 \text{ W}$.

Otroci pôsobili na sane v smere pohybu saní silou F , ktorú máme vypočítať. (Žiadna iná sila v tom smere na sane nepôsobila.) Ak sa sane pohybovali v smere pôsobenia sily F rýchlosťou v , tak celkový výkon otrokov, ktorí pôsobili na sane touto silou F , bol $P = F \cdot v$. Do tohto vzťahu dosadíme číselné hodnoty, ktoré poznáme, a potom z neho vyjadríme neznámu silu F . Dostaneme: $1200 \text{ W} = F \cdot 0,75 \text{ m/s}$

$$F = 1200 \text{ W} / (0,75 \text{ m/s}) = 1600 \text{ N} = \mathbf{1,6 \text{ kN}}$$

Pri tomto pohybe pôsobila na sane v smere pohybu sila veľkosti 1,6 kN.

b) Z časti a) vieme, že pri ťahaní saní bol celkový výkon týchto otrokov spolu $P = 1200 \text{ W}$. Ďalej si označme:

$F = 2,5 \text{ kN} = 2500 \text{ N}$ celková sila, ktorou pôsobili otroci na sane v smere pohybu
 v rýchlosť, ktorou sa otroci a sane pohybovali v tomto prípade
 $s = ?$ dráha, ktorú prešli sane za pol hodinu
 $t = 0,5 \text{ h} = 1800 \text{ s}$

Podobne ako v časti a), pre celkový výkon otrokov pri ťahaní saní platí vzťah $P = F \cdot v$. Ak doňho dosadíme číselné hodnoty, ktoré poznáme, môžeme z neho vyjadriť rýchlosť, ktorou sa sane pohybovali v tomto prípade: $1200 \text{ W} = 2500 \text{ N} \cdot v$

$$v = 1200 \text{ W} / 2500 \text{ N} = 0,48 \text{ m/s}$$

Touto rýchlosťou prešli sane za daný čas t dráhu $s = v \cdot t = 0,48 \text{ m/s} \cdot 1800 \text{ s} = \mathbf{864 \text{ m}}$.

Za pol hodinu prešli sane rovnomerným pohybom dráhu 864 m.

Správne odpovede:

a) 1,6 kN

b) 864 m

Bodovanie:

2 body za správnu odpoveď

1 bod za hodnotu v intervale od 863,99 m do 864,01 m v b)

0 bodov za nesprávnu odpoveď

③

Vzorové riešenie a bodovanie tejto úlohy sa nachádza na samostatnom liste.

④

a) Označme si:

$m = 60 \text{ g} = 0,06 \text{ kg}$ hmotnosť lvinho hekíska
 $h_1 = 105 \text{ cm} = 1,05 \text{ m}$ výška, v ktorej bola polohová energia hekíska trikrát väčšia ako jeho pohybová energia
 $h_2 = ?$ výška, v ktorej bola pohybová energia hekíska trikrát väčšia ako jeho polohová energia
 E_{p1} polohová energia hekíska vo výške h_1
 E_{k1} pohybová energia hekíska vo výške h_1
 E_{p2} polohová energia hekíska vo výške h_2
 E_{k2} pohybová energia hekíska vo výške h_2

Keď hekísek po tom, čo ho lva pustila z ruky, voľne padal na zem, jeho polohová energia sa postupne premieňala na jeho pohybovú energiu.

Polohová energia hekíska vo výške $h_1 = 1,05 \text{ m}$ nad zemou bola

$$E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 = 0,06 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 1,05 \text{ m} = 0,63 \text{ J}$$

Podľa zadania bola jeho pohybová energia v tejto výške trikrát menšia, čiže

$$E_{k1} = E_{p1} / 3 = 0,63 \text{ J} / 3 = 0,21 \text{ J}$$

Ako hekísek ďalej padal, časť z jeho polohovej energie E_{p1} sa premenila na jeho pohybovú energiu: o koľko sa jeho polohová energia zmenšila, o toľko sa zväčšila jeho pohybová energia. Takže ak porovnáme polohovú a pohybovú energiu hekíska vo výške h_1 a h_2 nad zemou, dostaneme: $E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1}$.

Vo výške h_2 bola pohybová energia hekíska trikrát väčšia ako jeho polohová energia, teda $E_{k2} = 3 \cdot E_{p2}$. Potom môžeme predchádzajúcu rovnicu prepísať takto: $E_{p1} - E_{p2} = 3 \cdot E_{p2} - E_{k1}$.

Z tejto poslednej rovnice postupne vyjadríme neznámu energiu E_{p2} : $E_{p1} + E_{k1} = 4 \cdot E_{p2}$;

$$4 \cdot E_{p2} = 0,63 \text{ J} + 0,21 \text{ J}; \quad 4 \cdot E_{p2} = 0,84 \text{ J}; \quad E_{p2} = 0,21 \text{ J}$$

Táto energia $E_{p2} = 0,21 \text{ J}$ je polohová energia hekíska vo výške h_2 , preto platí $E_{p2} = m \cdot g \cdot h_2$.

Po dosadení známych číselných hodnôt dostaneme rovnicu $0,21 \text{ J} = 0,06 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot h_2$

a z nej vyjadríme neznámu výšku h_2 : $h_2 = 0,21 \text{ J} / (0,06 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg}) = 0,35 \text{ m} = \mathbf{35 \text{ cm}}$.

Vo výške 35 cm nad zemou bola pohybová energia lvinho hekíska trikrát väčšia ako jeho polohová energia.

b) Využijeme označenie použité v časti a). Okrem toho si ešte označíme:

$h_0 = ?$ výška, z ktorej padal hekísek na zem, keď ho lva pustila z ruky
 E_{p0} polohová energia hekíska vo výške h_0

Vo výške h_0 mal hekísek polohovú energiu $E_{p0} = m \cdot g \cdot h_0$. Jeho pohybová energia bola vtedy podľa zadania nulová. Pohybovú energiu $E_{k1} = 0,21 \text{ J}$, ktorú mal hekísek vo výške h_1 , získal hekísek tak, že zo „začiatocnej“ polohovej energie E_{p0} sa časť (konkrétne 0,21 J) premenila na pohybovú energiu hekíska. Polohová energia $E_{p1} = 0,63 \text{ J}$, ktorú mal hekísek vo výške h_1 , je zvyšná časť zo „začiatocnej“ polohovej energie E_{p0} – tá časť, ktorá sa ešte „nestihla“ premeniť na pohybovú energiu hekíska. Inými slovami, platí $E_{p0} = E_{p1} + E_{k1}$. Takto dostaneme, že vo výške h_0 mal hekísek polohovú energiu $E_{p0} = 0,63 \text{ J} + 0,21 \text{ J} = 0,84 \text{ J}$.

③

a) Označme si:

 $m = 2,5 \text{ kg}$ hmotnosť reťaze $m_v = 2,26 \text{ kg}$ hmotnosť reťaze, ktorú „naváži“ mincier, keď je reťaz ponorená do vody F_g gravitačná sila, ktorou na reťaz pôsobí Zem F_v vztlaková sila, ktorá pôsobí na reťaz, keď je ponorená do vody F sila, ktorou pôsobí reťaz na rameno minciera, keď je ponorená do vody V objem reťaze V_v objem ponorenej časti reťaze $\rho = ?$ hustota kovu, z ktorého je zhotovená reťaz $\rho_{\text{voda}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ hustota vody

Najprv sa zamyslime, ako vlastne „funguje“ váženie na mincieri. Mincier „meria“ silu, ktorou pôsobí na háčik teleso, ktoré je na ňom zavesené. Za normálnych okolností sa však táto sila rovná gravitačnej sile, ktorou na to teleso pôsobí Zem; a vieme, že táto sila je priamo úmerná hmotnosti toho telesa. Vďaka tomu je stupnica na ramene minciera zhotovená tak, že keď na háčik pôsobí sila F , na stupnici odčítame hmotnosť $m = F/g$.

Teraz sa pozrime na to, ako sa zmení situácia, keď je časť reťaze ponorená vo vode. Na ponorenú časť pôsobí vztlaková sila, a preto sa zdá, že v tomto prípade reťaz „váži menej“ – na háčik minciera pôsobí reťaz menšou silou. Pre túto silu F platí $F = F_g - F_v$, a zároveň $F = m_v \cdot g$. Z toho vieme zistiť, aká veľká vztlaková sila pôsobila na reťaz, keď bola jej časť ponorená vo vode:

$$F_v = F_g - F = m \cdot g - m_v \cdot g = 2,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} - 2,26 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 25 \text{ N} - 22,6 \text{ N} = 2,4 \text{ N}.$$

Vztlakovú silu pôsobiacu na reťaz vieme však vyjadriť aj ináč, podľa Archimedovho zákona.

Platí: $F_v = V_v \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g$. V tomto vzťahu je pre nás neznámy len objem ponorenej časti V_v .

Julo si všimol, že štvrtina reťaze vyčnievala nad hladinou a zvyšné tri štvrtiny boli ponorené vo vode. To znamená, že pre objem ponorenej časti platí $V_v = (3/4) \cdot V$. Preto pre vztlakovú silu pôsobiacu na reťaz platí: $F_v = (3/4) \cdot V \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g$. Do tohoto vzťahu dosadíme číselné hodnoty, ktoré poznáme, a vyjadríme neznámy objem reťaze V :

$$2,4 \text{ N} = 0,75 \cdot V \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg}$$

$$V = 2,4 \text{ N} / (0,75 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg}) = 2,4 \text{ N} / (7500 \text{ N/m}^3) = 0,00032 \text{ m}^3.$$

Teraz už môžeme ľahko vyjadriť hustotu kovu, z ktorého bola zhotovená reťaz:

$$\rho = m/V = 2,5 \text{ kg} / 0,00032 \text{ m}^3 = \mathbf{7812,5 \text{ kg/m}^3}.$$

Hustota kovu, z ktorého bola zhotovená reťaz, bola 7812,5 kg/m³.

b) Použijeme označenie z časti a), akurát veličiny m_v , F_v , F a V_v sa budú vzťahovať na prípad, keď je vo vode ponorená polovica reťaze, čiže keď je $V_v = 0,5 \cdot V$.

V časti a) sme vypočítali objem reťaze, $V = 0,00032 \text{ m}^3$. Preto vieme vypočítať, aká veľká vztlaková sila pôsobí na reťaz v tomto prípade:

$$F_v = V_v \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g = 0,5 \cdot V \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g = 0,5 \cdot 0,00032 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} = 1,6 \text{ N}.$$

Preto v tomto prípade pôsobí reťaz na rameno minciera silou

$$F = F_g - F_v = m \cdot g - F_v = 2,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} - 1,6 \text{ N} = 25 \text{ N} - 1,6 \text{ N} = \mathbf{23,4 \text{ N}}.$$

V tomto prípade by reťaz na rameno minciera pôsobila silou 23,4 N.

Správne odpovede:

a) 7812,5 kg/m³

b) 23,4 N

Bodovanie:

2 body za správnu odpoveď

1 bod za hodnotu v intervale od 7812 do 7813 v a)

0 bodov za nesprávnu odpoveď