

vnútorná energia, prípadne vnútorná energia mantinelu, na ktorý puk narazil. Platí:

$$\Delta U = E_{k1} - E_{k2} = 0,5 \cdot m \cdot v_1^2 - 0,5 \cdot m \cdot v_2^2 = 0,5 \cdot m \cdot (v_1^2 - v_2^2).$$

Ak hmotnosť puku bola $m = 160 \text{ g} = 0,16 \text{ kg}$, tak po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$\Delta U = 0,5 \cdot 0,16 \text{ kg} \cdot ((4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - (3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2) = 0,08 \text{ kg} \cdot 3,04 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 0,2432 \text{ J} \approx \mathbf{0,24 \text{ J}}.$$

Takže **pri náraze puku na mantinel sa vnútorná energia puku a mantinelu (spolu) zvýšila o 0,24 J.**

Správne odpovede: a) 2,54 m b) 0,24 J

Bodovanie:

- 2 body** za správnu odpoveď
2 body za hodnotu 2,541 alebo 2,5408 v a)
2 body za hodnotu 0,243 alebo 0,2432 v b)
1 bod za hodnotu v intervale od 2,49 do 2,57 v a)
1 bod za hodnotu $-0,24$ v b)
1 bod za hodnotu v intervale od 0,24 do 0,245 v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤

a) Ak do vedra za čas $t = 50 \text{ s}$ natiekla voda s objemom $V = 6,5 \text{ l} = 6,5 \text{ dm}^3 = 6500 \text{ cm}^3$, tak za jednu sekundu do vedra natiekla voda s objemom $V_1 = V/t \cdot 1 \text{ s} = 6500 \text{ cm}^3 / 50 = 130 \text{ cm}^3$. Tento objem vody pretiekol vo výške 3 cm pod otvorom z kohútika kruhovým prierezom s priemerom $d = 1,2 \text{ cm}$ za jednu sekundu. Preto platí:

$$130 \text{ cm}^3 = S \cdot v \cdot 1 \text{ s} = \pi \cdot (d/2)^2 \cdot v \cdot 1 \text{ s}, \text{ kde } v \text{ je rýchlosť, ktorou voda preteká týmto prierezom.}$$

Z tejto rovnice môžeme vyjadriť rýchlosť tečúcej vody:

$$v = (V/t) / (\pi \cdot (d/2)^2) = 130 \text{ cm}^3 / (3,14 \cdot (1,2 \text{ cm} / 2)^2 \cdot 1 \text{ s}) \approx 115,00354 \text{ cm/s} \approx \mathbf{1,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Vo výške 3 cm pod otvorom z kohútika tečie prúd vody rýchlosťou 1,15 m.s⁻¹.

b) Ten istý objem vody V_1 , ktorý za jednu sekundu pretiekol vo výške $h = 3 \text{ cm}$ pod otvorom z kohútika kruhovým prierezom s priemerom $d = 1,2 \text{ cm}$ rýchlosťou v_1 , pretiekol vo výške $h_2 = 10 \text{ cm}$ pod otvorom z kohútika kruhovým prierezom s neznámym priemerom d_2 rýchlosťou v_2 . Preto platí: $\pi \cdot (d/2)^2 \cdot v_1 \cdot 1 \text{ s} = V_1 = \pi \cdot (d_2/2)^2 \cdot v_2 \cdot 1 \text{ s}$ (*).

Voda vyteká z vodovodného kohútika zvislo nadol pod vplyvom gravitačnej sily Zeme, preto sa pohybuje so zrýchlením $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ktoré má smer zvislo nadol. Takže môžeme zostaviť rovnicu, ktorá platí pre rovnomerne zrýchlený pohyb vody vytekajúcej z kohútika:

$$h_2 = h + v \cdot t + 1/2 \cdot g \cdot t^2. \text{ Z tejto rovnice vyjadříme čas } t, \text{ za ktorý nejaký „kúsok“ vody prešiel z výšky } h \text{ do výšky } h_2, \text{ a potom rýchlosť } v_2 = v + g \cdot t, \text{ ktorú mala voda vo výške } h_2.$$

Pre zadané číselné hodnoty dostaneme kvadratickú rovnicu $0,10 = 0,03 + 1,15 \cdot t + 4,9 \cdot t^2$, ktorej korene sú $t_1 \approx 0,050152 \text{ s}$ a $t_2 \approx -0,284845$; z nich fyzikálny význam má len hodnota $t_1 \approx 0,050152 \text{ s}$. Potom pre rýchlosť v_2 dostaneme: $v_2 \approx (1,150035 + 9,8 \cdot 0,050152) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 \approx 1,64152 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 164,152 \text{ cm/s}$.

Teraz už môžeme vypočítať hľadaný priemer d_2 – vyjadříme ho z rovnice (*). Dostaneme:

$$(d_2/2)^2 = V_1 / (\pi \cdot v_2 \cdot 1 \text{ s})$$

$$d_2 = (V_1 / (\pi \cdot v_2 \cdot 1 \text{ s}))^{1/2} \cdot 2 \approx (130 \text{ cm}^3 / (3,14 \cdot 164,152 \text{ cm}))^{1/2} \cdot 2 \approx 1,004 \text{ cm}.$$

(V závislosti od presnosti výpočtov môže výjsť hodnota d_2 v intervale 1,004 až 1,005 cm.)

Vo výške 10 cm pod otvorom z kohútika má tento prúd vody priemer 1,00 cm.

Správne odpovede: a) 1,15 m.s⁻¹ b) 1,00 cm

Bodovanie:

- 2 body** za správnu odpoveď
2 body za hodnotu v intervale od 1,149 do 1,151 v a)
2 body za hodnotu v intervale od 1,00 do 1,01 v b)
1 bod za hodnotu 0,29 v a)
1 bod za hodnotu v intervale od 0,99 do 1,02 v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď



kategória **S3**

fyzIQ

2005/2006

Vzorové riešenia

1. séria pre žiakov 3. a 4. ročníka SŠ a septimy a oktávy OG

① *Vzorové riešenie tejto úlohy sa nachádza na samostatnom liste vo vnútri.*

Správne odpovede: a) 1,88-krát b) 0,52 km/h

Bodovanie:

- 2 body** za správnu odpoveď
2 body za hodnotu 1,875 alebo 15/8 v a)
2 body za hodnotu 0,522 alebo 0,5217 alebo 12/23 v b)
1 bod za hodnotu v intervale od 1,87 do 1,88 v a)
1 bod za hodnotu v intervale od 0,52 do 0,53 v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

a) Označme si:

R odpor 20 Ω (potom Vladove rezistory majú odpor R , 2R, 3R, 4R)

R_o odpor 0,2 Ω (vnútorný odpor jednej batérie)

R_c celkový odpor sústavy

R_{x-y} odpor časti Vladovho zapojenia medzi uzlami x a y

U napätie 1,5V

$I = ?$ prúd tečúci vodičom medzi uzlom A a zdrojom napätia

Prúd pretekajúci vodičom medzi uzlom A a batériami je podľa Ohmovho zákona podiel napätia v sústave (2U) a celkového odporu sústavy (R_c), čiže $I = (2U) / R_c$.

Preto potrebujeme vypočítať celkový odpor sústavy. Pripomeňme si teda, že

– výsledný odpor sériovo zapojených rezistorov (napr. R_1 a R_2) sa rovná súčtu ich odporov ($R_{sér} = R_1 + R_2$);

– prevrátená hodnota výsledného odporu paralelne zapojených rezistorov (napr. R_3 a R_4) je súčet prevrátených hodnôt ich odporov ($1/R_{par} = 1/R_3 + 1/R_4$); keď tento vzťah upravíme, dostaneme, že $1/R_{par} = (R_4 + R_3) / (R_3 \cdot R_4)$ a z toho $R_{par} = (R_3 \cdot R_4) / (R_4 + R_3)$.

Tak teraz konkrétne pre náš prípad: Máme paralelne zapojené rezistory medzi uzlami B-D a medzi uzlami C-E. Pre ne platí, že ich výsledný odpor je:

$$R_{B-D} = (4R \cdot 3R) / (4R + 3R) = 12R / 7 \quad \text{a} \quad R_{C-E} = (2R \cdot R) / (2R + R) = 2R / 3.$$

Navyše vetvy s týmito rezistorami/odporami sú zapojené navzájom paralelne, a ku nim sú potom do série zapojené dve batérie s vnútorným odporom R_o . Takže celkový odpor sústavy je: $R_c = 2R_o + (R_{B-D} \cdot R_{C-E}) / (R_{B-D} + R_{C-E}) = 2R_o + ((12/7)R \cdot (2/3)R) / ((12/7)R + (2/3)R) = 2R_o + (24/21)R / ((36+14)/21)R = 2R_o + (24/50)R = 2 \cdot 0,2 \Omega + 0,48 \cdot 20 \Omega = 10 \Omega$.

Potom hľadaný prúd I je $I = 2U / R_c = 3 \text{ V} / 10 \Omega = 0,3 \text{ A} = \mathbf{300 \text{ mA}}$.

b) Použijeme označenie z časti a) tejto úlohy a ešte si označíme:

U_{x-y} rozdiel elektrických potenciálov medzi x a y

I_x prúd prechádzajúci rezistorom s odporom x

V tejto časti potrebujeme vypočítať podiel prúdov na dvoch miestach. Použijeme ten istý postup ako v časti a), vypočítame si napätie na týchto častiach a odpory týchto častí, a vydělíme. Napätia, ktoré potrebujeme, sú náhodou rovnaké (pretože odpor vodičov sme

zanedbali a teda vodiče nespôsobiajú úbytok napätia), a teda $U_{a-f} = U_{b-d} = U_{c-f}$. Čo sa týka príslušných odporov, tie sme si už vypočítali v časti a). Preto $I_{a-c} = I_{e-f} = U_{a-f} / R_{c-e}$ a $I_{60\Omega} = U_{b-f} / 3R = U_{a-f} / 3R$. Podiel týchto prúdov je potom $I_{e-f} / I_{60\Omega} = 3R / R_{c-e} = 3R / (2R / 3) = 9/2 = 4,5$. Takže vodičom medzi uzlami E a F prechádza 4,5-krát väčší prúd.

Správne odpovede: a) 300 mA b) 4,5-krát
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

③

Označme si hmotnosť lávky m , hmotnosť Janka m_J , hmotnosť Marienky m_M a $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Ostatné označenie vysvetlíme priebežne v ďalšom texte.

Keď Janko a Marienka stoja na lávke, pôsobia na lávku tieto sily:

- gravitačná (ťaživá) sila Zeme F_g zvislo nadol, $F_g = m \cdot g$,
- tiaž Janka stojaceho na lávke F_J zvislo nadol, $F_J = m_J \cdot g$,
- tiaž Marienky stojacej na lávke F_M zvislo nadol, $F_M = m_M \cdot g$,
- sila, ktorou podopiera lávku "ľavú" podpera, zvislo nahor – označme ju F_L ,
- sila, ktorou podopiera lávku "pravú" podpera, zvislo nahor – označme ju F_P .

Tieto sily sú v rovnováhe, teda platí (pre ich veľkosti) $F_g + F_J + F_M = F_L + F_P$.

Lávka pôsobí na ľavú podperu silou veľkosti F_L v smere zvislo nahor a na pravú podperu silou veľkosti F_P v smere zvislo nahor. V úlohe ide o porovnanie (rozdiel) týchto dvoch síl, teda o rozdiel $F_L - F_P$ (vrátane znamienka); samotné sily F_L a F_P nie sú podstatné.

Zistíme, ako prispievajú jednotlivé sily F_g , F_J a F_M k rozdielu síl F_L a F_P .

Podľa zadania, keď na lávke nikto nestojí, pôsobí lávka na obidve podpery rovnako veľkými silami. To znamená, že príspevok sily F_g k rozdielu $F_L - F_P$ je nulový.

Označme si príspevok sily F_J (F_M) k sile F_L ako F_{JL} (F_{ML}), príspevok sily F_J (F_M) k sile F_P ako F_{JP} (F_{MP}), vzdialenosť Janka (Marienky) od ľavej podpery r_{JL} (r_{ML}), vzdialenosť Janka (Marienky) od pravej podpery r_{JP} (r_{MP}) a vzdialenosť medzi obidvoma podperami d .

Zrejme platí $F_L - F_P = (F_{JL} - F_{JP}) + (F_{ML} - F_{MP})$; vyjadríme si sily F_{JL} , F_{JP} , F_{ML} a F_{MP} .

Ak stojí Janko na lávke vo vzdialenosti r_{JP} od "pravej" podpery, tak pre rozklad sily F_J na zložky F_{JL} a F_{JP} platia tieto dve rovnice: $F_{JL} + F_{JP} = F_J$ a $F_{JL} \cdot r_{JL} = F_{JP} \cdot r_{JP}$. Podobne platia rovnice $F_{ML} + F_{MP} = F_M$ a $F_{ML} \cdot r_{ML} = F_{MP} \cdot r_{MP}$. Okrem toho je $r_{JL} + r_{JP} = d$ a $r_{ML} + r_{MP} = d$.

a) Podľa zadania je lávka dlhá 2,5 m a na obidvoch brehoch je podopretá podperami vo vzdialenosti 5 cm od konca. To znamená, že vzdialenosť medzi podperami je $d = 2,4 \text{ m}$.

Ak Janko stojí na lávke vo vzdialenosti 75 cm od jej "ľavého" konca, tak jeho vzdialenosť od "ľavej" podpery je $r_{JL} = 0,7 \text{ m}$ a jeho vzdialenosť od "pravej" podpery je $r_{JP} = 1,7 \text{ m}$. Pre zadanú hodnotu hmotnosti Janka $m_J = 24 \text{ kg}$ je $F_J = m_J \cdot g = 24 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m.s}^{-2} = 235,2 \text{ N}$.

Máme teda vyriešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} F_{JL} + F_{JP} &= 235,2 \text{ N} & \rightarrow & F_{JL} = 235,2 \text{ N} - F_{JP} \\ F_{JL} \cdot 0,7 \text{ m} &= F_{JP} \cdot 1,7 \text{ m} & \rightarrow & (235,2 \text{ N} - F_{JP}) \cdot 0,7 \text{ m} = F_{JP} \cdot 1,7 \text{ m} \end{aligned}$$

a z toho je postupne $164,64 \text{ N} \cdot \text{m} = F_{JP} \cdot 2,4 \text{ m}$ a $F_{JP} = 68,6 \text{ N}$; a potom $F_{JL} = 166,6 \text{ N}$.

Podobne ak stojí Marienka na lávke vo vzdialenosti 140 cm od jej "pravého" konca, tak je $r_{MP} = 135 \text{ cm}$ a $r_{ML} = 105 \text{ cm}$; a pre $m_M = 32 \text{ kg}$ je $F_M = m_M \cdot g = 32 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m.s}^{-2} = 313,6 \text{ N}$.

Opäť budeme riešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych: $F_{ML} + F_{MP} = 313,6 \text{ N}$

$$F_{ML} \cdot 1,05 \text{ m} = F_{MP} \cdot 1,35 \text{ m}$$

Podobne ako v predošlom prípade dostaneme jej riešenie, $F_{ML} = 176,4 \text{ N}$ a $F_{MP} = 137,2 \text{ N}$. Takže môžeme vypočítať hľadaný rozdiel $F_L - F_P$: $F_L - F_P = (F_{JL} - F_{JP}) + (F_{ML} - F_{MP}) = (166,6 \text{ N} - 68,6 \text{ N}) + (176,4 \text{ N} - 137,2 \text{ N}) = 137,2 \text{ N}$. To znamená, že lávka v tomto prípade pôsobila na "ľavú" podperu o 137,2 N väčšou silou ako na "pravú" podperu.

b) Ak Marienka s hmotnosťou $m = 32 \text{ kg}$ stála na lávke vo vzdialenosti 80 cm od jej "pravého" konca, tak je $r_{MP} = 75 \text{ cm}$, $r_{ML} = 165 \text{ cm}$ a $F_M = 313,6 \text{ N}$. Opäť budeme riešiť sústavu rovníc o neznámych F_{ML} a F_{MP} :

$$\begin{aligned} F_{ML} + F_{MP} &= 313,6 \text{ N} \\ F_{ML} \cdot 1,65 \text{ m} &= F_{MP} \cdot 0,75 \text{ m} \end{aligned}$$

Podobne ako v predošlom prípade dostaneme jej riešenie, $F_{ML} = 98 \text{ N}$ a $F_{MP} = 215,6 \text{ N}$.

Podľa zadania v tomto prípade pôsobí lávka na "pravú" podperu o 147 N väčšou silou ako na "ľavú" podperu – platí teda $F_P - F_L = 147 \text{ N}$. K tomuto rozdielu prispieva Marienka rozdielom $F_{MP} - F_{ML} = 215,6 \text{ N} - 98 \text{ N} = 117,6 \text{ N}$. Preto Janko musí prispieť rozdielom

$$F_{JP} - F_{JL} = F_P - F_L - (F_{MP} - F_{ML}) = 147 \text{ N} - 117,6 \text{ N} = 29,4 \text{ N}$$

Hmotnosť Janka je $m_J = 24 \text{ kg}$, a preto $F_J = 235,2 \text{ N}$. Platí teda $F_{JP} + F_{JL} = F_J = 235,2 \text{ N}$. Takže určíme sily F_{JP} a F_{JL} : zo sústavy rovníc $F_{JP} - F_{JL} = 29,4 \text{ N}$; $F_{JP} + F_{JL} = 235,2 \text{ N}$ dostaneme $F_{JP} = 132,3 \text{ N}$ a $F_{JL} = 102,9 \text{ N}$.

Ak Janko stojí vo vzdialenosti r_{JP} od "pravej" podpery, platí rovnica $F_{JL} \cdot (d - r_{JP}) = F_{JP} \cdot r_{JP}$, resp. (po dosadení konkrétnych číselných hodnôt) $102,9 \text{ N} \cdot (2,4 \text{ m} - r_{JP}) = 132,3 \text{ N} \cdot r_{JP}$. Z tejto rovnice vyjadríme r_{JP} a dostaneme, že $r_{JP} = 1,05 \text{ m} = 105 \text{ cm}$. Keďže "pravá" podpera sa nachádza vo vzdialenosti 5 cm od "pravého" konca lávky, Janko stojí v tomto prípade vo vzdialenosti 110 cm od "pravého" konca.

Správne odpovede: a) A: na "ľavú" podperu o 137,2 N väčšou silou b) 110 cm
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď

- 2 body za odpoveď A s hodnotou 140 N v a)
- 1 bod za odpoveď A s nesprávnou číselnou hodnotou v a)
- 1 bod za odpoveď B s hodnotou 137,2 N alebo 140 N v a)
- 1 bod za hodnotu v intervale od 109,9 cm do 110,1 cm v b)
- 1 bod za hodnotu 105 cm alebo 111,5 cm v b)
- 0 bodov za nesprávnu odpoveď

④

a) Puk s hmotnosťou m sa šmýka po vodorovnej ľadovej ploche so súčiniteľom šmykového trenia $f = 0,05$. Pri tomto pohybe naňho pôsobí vo vodorovnom smere jedine trecia sila F_t , ktorej veľkosť je $F_t = m \cdot g \cdot f$ a ktorej smer je opačný ako smer pohybu puku. Preto sa puk pohybuje rovnomerne spomaleným priamočiarym pohybom so záporným zrýchlením veľkosti $a = F_t / m = m \cdot g \cdot f / m = g \cdot f = 9,8 \text{ m.s}^{-2} \cdot 0,05 = 0,49 \text{ m.s}^{-2}$.

Puk bol vystrelený rýchlosťou $v_0 = 4,3 \text{ m.s}^{-1}$. Kým narazil na mantinel, prešiel rovnomerne spomaleným pohybom dráhu s , ktorú máme vypočítať, za nejaký čas t . Za tento čas sa jeho rýchlosť znížila na hodnotu $v_1 = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$ (touto rýchlosťou narazil na mantinel). Preto platí: $v_1 = v_0 - a \cdot t$. Z tohto vzťahu vyjadríme čas t :

$$t = (v_0 - v_1) / a = (v_0 - v_1) / (g \cdot f) = (4,3 \text{ m.s}^{-1} - 4,0 \text{ m.s}^{-1}) / 0,49 \text{ m.s}^{-2} = (30/49) \text{ s} \approx 0,612245 \text{ s}$$

Za tento čas prešiel vystrelený puk dráhu $s = v_0 \cdot t - 0,5 \cdot a \cdot t^2$. Túto dráhu môžeme vyjadriť jednak všeobecne: $s = v_0 \cdot (v_0 - v_1) / (g \cdot f) - 0,5 \cdot g \cdot f \cdot ((v_0 - v_1) / (g \cdot f))^2 = v_0 \cdot (v_0 - v_1) / (g \cdot f) - 0,5 \cdot (v_0 - v_1) \cdot (v_0 - v_1) / (g \cdot f) = (0,5 \cdot v_0 + 0,5 \cdot v_1) \cdot (v_0 - v_1) / (g \cdot f) = 0,5 \cdot (v_0^2 - v_1^2) / (g \cdot f)$, jednak pomocou zadaných číselných hodnôt:

$$\begin{aligned} s &= 4,3 \text{ m.s}^{-1} \cdot (30/49) \text{ s} - 0,5 \cdot 0,49 \text{ m.s}^{-2} \cdot ((30/49) \text{ s})^2 = (129/49) \text{ m} - (4,5/49) \text{ m} = \\ &= (124,5/49) \text{ m} \approx 2,540816 \text{ m} \approx 2,54 \text{ m} \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že Miro vystrelil puk vo vzdialenosti 2,54 m od mantinelu.

b) Puk s hmotnosťou m narazil na mantinel rýchlosťou $v_1 = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$. Tesne pred nárazom bola jeho kinetická energia $E_{k1} = 0,5 \cdot m \cdot v_1^2$. Od mantinelu sa puk odrazil rýchlosťou $v_2 = 3,6 \text{ m.s}^{-1}$. Tesne po odraze bola jeho kinetická energia $E_{k2} = 0,5 \cdot m \cdot v_2^2$. Pri náraze sa potenciálna energia puku vzhľadom na Zem nemenila. To znamená, že ak sa pri náraze na mantinel zmenila (=zmenšila) kinetická energia puku, tak sa musela zmeniť (=zväčšiť) jeho

①

a) Označme si:

s_1 dĺžka úseku z Malej Lesnej na Rázcestie pod Sivým Vrchom
 s_2 dĺžka úseku od Rázcestia pod Sivým Vrchom do Medvedej Lehoty
 t_1 čas, za ktorý Novákovci zvyčajne prejdú úsek z Lesnej na Rázcestie
 t_2 čas, za ktorý Novákovci zvyčajne prejdú úsek od Rázcestia do Lehoty
 $v_1 = 2,5$ km/h rýchlosť, ktorou Novákovci zvyčajne prejdú úsek z Lesnej na Rázcestie
 $v_2 = 4,0$ km/h rýchlosť, ktorou Novákovci zvyčajne prejdú úsek od Rázcestia do Lehoty
 t_{1m} čas, za ktorý prešli Novákovci úsek z Lesnej na Rázcestie minulý týždeň
 t_{2m} čas, za ktorý prešli Novákovci úsek od Rázcestia do Lehoty minulý týždeň
 v_{1m} rýchlosť, ktorou prešli Novák. úsek z Lesnej na Rázcestie minulý týždeň
 v_{2m} rýchlosť, ktorou prešli Novák. úsek od Rázcestia do Lehoty minulý týždeň

Ak si vyjadríme, ktorý úsek Novákovci prejdú akou rýchlosťou za aký čas v zvyčajnom prípade, dostaneme rovnice $s_1 = v_1 \cdot t_1$ a $s_2 = v_2 \cdot t_2$. Podobne dostaneme pre prípad z minulého týždňa rovnice $s_1 = v_{1m} \cdot t_{1m}$ a $s_2 = v_{2m} \cdot t_{2m}$.

Vieme, že Novákovci zvyčajne idú tak, že úsek z Lesnej na Rázcestie prejdú za dvakrát dlhší čas než úsek od Rázcestia do Lehoty. Platí teda $t_1 = 2 \cdot t_2$. Keďže rýchlosti v_1 a v_2 sú známe, môžeme dráhy s_1 a s_2 vyjadriť pomocou nich a času t_2 : $s_1 = v_1 \cdot 2 \cdot t_2$ a $s_2 = v_2 \cdot t_2$. Z toho vieme potom vyjadriť, koľkokrát dlhší je jeden úsek než druhý: $s_1 / s_2 = v_1 \cdot 2 / v_2$.

Podľa zadania išli minulý týždeň Novákovci tak, že jeden aj druhý úsek prešli priemernou rýchlosťou o 0,5 km/h väčšou než zvyčajne. Ak si označíme týchto 0,5 km/h ako Δv , dostaneme vzťahy medzi rýchlosťami v_1 , v_2 a v_{1m} , v_{2m} : $v_{1m} = v_1 + \Delta v$ a $v_{2m} = v_2 + \Delta v$.

V úlohe je treba vypočítať pomer časov t_{1m} a t_{2m} . Pre tieto časy platí $t_{1m} = s_1 / v_{1m}$ a $t_{2m} = s_2 / v_{2m}$. Potom pre ich pomer postupne dostaneme:

$$t_{1m} / t_{2m} = (s_1 / v_{1m}) / (s_2 / v_{2m}) = (s_1 / s_2) \cdot (v_{2m} / v_{1m}) = (v_1 \cdot 2 / v_2) \cdot ((v_2 + \Delta v) / (v_1 + \Delta v)).$$

Po dosadení zadaných číselných hodnôt v_1 , v_2 a Δv (všetky v km/h) je $t_{1m} / t_{2m} = (2,5 \cdot 2 / 4) \cdot ((4 + 0,5) / (2,5 + 0,5)) = 5/4 \cdot 4,5 / 3 = 5/4 \cdot 3/2 = 15/8 = 1,875 \approx 1,88$.

To znamená, že **minulý týždeň prešli Novákovci úsek z Lesnej na Rázcestie za 1,88-krát dlhší čas než úsek od Rázcestia do Lehoty.**

b) Využijeme označenia a výpočty z časti a).

Novákovci chodievajú zvyčajne celú trasu z Lesnej do Lehoty bez zastávky. To znamená, že dráhu $s = s_1 + s_2$ zvyčajne prejdú za čas $t = t_1 + t_2 = 2 \cdot t_2 + t_2 = 3 \cdot t_2$. V tomto prípade je ich priemerná rýchlosť na celej trase $v_p = s / t = (s_1 + s_2) / (t_1 + t_2) = (v_1 \cdot 2 \cdot t_2 + v_2 \cdot t_2) / 3 \cdot t_2 = (2 \cdot v_1 + v_2) / 3$, po dosadení číselných hodnôt $v_p = (2 \cdot 2,5 \text{ km/h} + 4 \text{ km/h}) / 3 = 3 \text{ km/h}$.

Minulý týždeň prešli Novákovci celú trasu – dráhu $s = s_1 + s_2$ za čas $t_m = t_{1m} + t_{2m}$. Pritom je $t_{1m} = s_1 / v_{1m} = v_1 \cdot 2 \cdot t_2 / (v_1 + \Delta v)$ a $t_{2m} = s_2 / v_{2m} = v_2 \cdot t_2 / (v_2 + \Delta v)$. Preto ich priemerná rýchlosť na celej trase minulý týždeň bola $v_{pm} = s / t_m = (s_1 + s_2) / (t_{1m} + t_{2m}) = (v_1 \cdot 2 \cdot t_2 + v_2 \cdot t_2) / (v_1 \cdot 2 \cdot t_2 / (v_1 + \Delta v) + v_2 \cdot t_2 / (v_2 + \Delta v)) = (2 \cdot v_1 + v_2) / (2 \cdot v_1 / (v_1 + \Delta v) + v_2 / (v_2 + \Delta v))$.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt v_1 , v_2 a Δv (všetky v km/h) dostaneme (v km/h): $v_p = (2 \cdot 2,5 + 4) / (2 \cdot 2,5 / (2,5 + 0,5) + 4 / (4 + 0,5)) = 9 / (5/3 + 4/4,5) = 9 / (15/9 + 8/9) = 9 / (23/9) = 81/23 = 3 + 12/23$.

Ak porovnáme priemerné rýchlosti v_p (zvyčajne) a v_{pm} (minulý týždeň), dostaneme, že $\Delta v_p = v_{pm} - v_p = (3 + 12/23) \text{ km/h} - 3 \text{ km/h} = 12/23 \text{ km/h} \approx 0,521739 \text{ km/h} \approx 0,52 \text{ km/h}$.

Minulý týždeň mali Novákovci na celej trase o 0,52 km/h väčšiu priemernú rýchlosť než zvyčajne.