

To, že ampérmeter má vnútorný odpor R_A , znamená, že sa správa (z hľadiska prúdu, ktorý ním prechádza) ako rezistor s odporom R_A .

a) Prúd prechádzajúci ampérmetrom pri zapojení podľa schémy 1 je vlastne celkový prúd, ktorý prechádza obvodom pri tomto zapojení. Ten určíme pomocou Ohmovho zákona, ak budeme poznať celkový odpor obvodu.

Pre celkový odpor rezistorov R_1 a R_2 spojených paralelne platí $1/R_{par} = 1/R_1 + 1/R_2$, čiže $R_{par} = 1 / (1/R_1 + 1/R_2)$. Ampérmeter je k nim zapojený do série, preto celkový odpor obvodu je $R = R_A + R_{par} = R_A + 1 / (1/R_1 + 1/R_2)$ a prechádza ním (ampérmetrom aj celým obvodom) celkový prúd $I = U / R = U / (R_A + 1 / (1/R_1 + 1/R_2))$.

Ak je vnútorný odpor ampérmetra nulový, je celkový odpor obvodu $R' = R_{par} = 1 / R_1 + 1 / R_2$, čiže menší (nanajvýš rovný) ako R . Preto v tomto prípade bude prechádzať ampérmetrom väčší prúd I' , ktorého veľkosť je $I' = U / R' = U / (1/R_1 + 1/R_2)$. Rozdiel medzi veľkosťou prúdu, ktorý prechádza ampérmetrom v jednom a v druhom prípade, je potom $I' - I$, pričom $I' - I = U / (1 / (1/R_1 + 1/R_2)) - U / (R_A + 1 / (1/R_1 + 1/R_2))$.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme, že prúd I je menší oproti prúdu I' o $I' - I = 4,5 \text{ V} / (1 / (1/(90 \Omega) + 1/(10 \Omega))) - 4,5 \text{ V} / (1 \Omega + 1 / (1/(90 \Omega) + 1/(10 \Omega))) = 4,5 \text{ V} / (1 / (10 / (90 \Omega))) - 4,5 \text{ V} / (1 \Omega + 90 \Omega / 10) = 4,5 \text{ V} / 9 \Omega - 4,5 \text{ V} / 10 \Omega = 0,5 \text{ A} - 0,45 \text{ A} = 0,05 \text{ A} = \mathbf{50 \text{ mA}}$.

b) Pri zapojení podľa schémy 2 si stačí uvedomiť, že napätie medzi uzlami je rovnaké ako napätie U medzi svorkami batérie, ktoré poznáme.

Pri tomto zapojení prechádza ampérmetrom len prúd, ktorý prechádza vetvou, v ktorej sa nachádza rezistor R_1 – ampérmeter je k nemu zapojený do série. Celkový odpor tejto vetvy je $R = R_1 + R_A$ a napätie medzi jej koncami (=uzlami) je U , takže podľa Ohmovho zákona prechádza touto vetvou (teda aj ampérmetrom) prúd $I = U / R = U / (R_1 + R_A)$.

V prípade, že odpor ampérmetra je nulový, je odpor tejto vetvy len R_1 , a prechádza ňou (aj ampérmetrom) prúd $I' = U / R_1$. Opäť porovnáme hodnoty I a I' a zistíme, že ampérmetrom prechádza v prípade, že jeho vnútorný odpor je R_A , o $I' - I = U / R_1 - U / (R_1 + R_A)$ menší prúd, než keby bol jeho vnútorný odpor nulový.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme, že prúd I je menší oproti prúdu I' o $I' - I = 4,5 \text{ V} / (90 \Omega) - 4,5 \text{ V} / (90 \Omega + 1 \Omega) = 0,05 \text{ A} - (4,5 / 91) \text{ A} = 0,0005495 \text{ A} = \mathbf{0,55 \text{ mA}}$.

Správne odpovede: a) C: o 50 mA menší b) C: o 0,55 mA menší
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 2 body za C s hodnotu v intervale od 0,54 do 0,56 v b)
 1 bod za C s nesprávnou číselnou hodnotu v a) aj v b)
 1 body za A s hodnotu 50 mA v a)
 1 body za A s hodnotu v intervale od 0,54 do 0,56 v b)
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤

Vzorové riešenie tohoto príkladu sa nachádza na samostatnom liste.

Správne odpovede: a) B: taká istá b) C: o 1,44 m väčšia
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 2 body za C s hodnotu v intervale od 1,4399 do 1,44 v b)
 1 bod za C s nesprávnou číselnou hodnotu v b)
 1 body za B s hodnotu v intervale od 1,4399 do 1,44 v b)
 0 bodov za nesprávnu odpoveď



6. ročník

fyzIQ

kat. S2

Vzorové riešenia

6. séria pre žiakov 2. ročníka SŠ a sexty gymnázia

①

Pripomeňme si, čo platí pre výslednú kapacitu dvoch kondenzátorov C_A a C_B :

- ak sú spojené paralelne, ich výsledná kapacita je $C_P = C_A + C_B$,
- ak sú spojené do série, tak pre ich výslednú kapacitu C_S platí $1/C_S = 1/C_A + 1/C_B$, a teda $C_S = 1 / (1/C_A + 1/C_B)$.

Teraz si vyjadríme výslednú kapacitu kondenzátorov v Jurajovom zapojení. Výsledná kapacita kondenzátorov C_2 a C_3 je $C_{23} = 1 / (1/C_2 + 1/C_3)$ a výsledná kapacita všetkých troch kondenzátorov je potom $C = C_1 + C_{23} = C_1 + 1 / (1/C_2 + 1/C_3)$.

Vidíme, že ak by Juraj medzi sebou vymenil kondenzátory C_2 a C_3 , výsledná kapacita C by sa nezmenila. To znamená, že pri vymieňaní všetkých troch kondenzátorov medzi sebou môže dostať len tri rôzne hodnoty výslednej kapacity – podľa toho, ktorý kondenzátor by zaradil do samostatnej vetvy ako C_1 . Pre každú možnosť vypočítame výslednú kapacitu ...

Ak sú kapacity jednotlivých kondenzátorov 52,5 pF, 70 pF a 210 pF, môžu nastať konkrétne tieto tri možnosti:

- A: $C_1 = 52,5 \text{ pF}$. Vtedy je buď $C_2 = 70 \text{ pF}$ a $C_3 = 210 \text{ pF}$, alebo naopak, pričom v oboch prípadoch je výsledná kapacita $C = 52,5 \text{ pF} + 1 / (1/(70 \text{ pF}) + 1/(210 \text{ pF})) = 52,5 \text{ pF} + 1 / (4 / (210 \text{ pF})) = 52,5 \text{ pF} + 52,5 \text{ pF} = 105 \text{ pF}$.
- B: $C_1 = 70 \text{ pF}$ – vtedy je výsledná kapacita $C = 70 \text{ pF} + 1 / (1/(52,5 \text{ pF}) + 1/(210 \text{ pF})) = 70 \text{ pF} + 1 / (5 / (210 \text{ pF})) = 70 \text{ pF} + 42 \text{ pF} = 112 \text{ pF}$.
- C: $C_1 = 210 \text{ pF}$ – vtedy je výsledná kapacita $C = 210 \text{ pF} + 1 / (1/(52,5 \text{ pF}) + 1/(70 \text{ pF})) = 210 \text{ pF} + 1 / (7 / (210 \text{ pF})) = 210 \text{ pF} + 30 \text{ pF} = 240 \text{ pF}$.

a) Podľa zadania je výsledná kapacita kondenzátorov pri Jurajovom zapojení 105 pF. Z predchádzajúcich výpočtov vyplýva, že toto môže nastať len v prípade, keď kapacita kondenzátora C_1 je **52,5 pF**. Takže **kapacita kondenzátora C_1 je 52,5 pF**.

b) Ak porovnáme výsledné kapacity v jednotlivých prípadoch, zistíme, že **vzájomným vymieňaním kondenzátorov môže Juraj dosiahnuť výslednú kapacitu najviac 240 pF**.

Správne odpovede: a) A: 52,5 pF b) 240 pF
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 1 bod za hodnotu v intervale od 239,9 pF do 240,3 pF v b)
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

a) Označme si:

$m_z = 1 \text{ kg}$ hmotnosť závažia

$g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

$m_p = ?$ hmotnosť jedného perníka

a_L vzdialenosť miesta, kde pôsobí na vahadlo ľavá miska, od osi otáčania

a_P vzdialenosť miesta, kde pôsobí na vahadlo pravá miska, od osi otáčania

⑤

Označme si:

- $v = 54 \text{ km/h}$ pôvodná rýchlosť kontajnerov vzhľadom na povrch planéty
- $m_1 = m_3 = 1000 \text{ kg}$ hmotnosť predného a zadného kontajnera
- $m_2 = 1400 \text{ kg}$ hmotnosť stredného kontajnera
- $m_s = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$ hmotnosť strely
- $v_s = 600 \text{ m/s}$ rýchlosť vystrelených striel vzhľadom na stredný kontajner
- v_2', p_2' rýchlosť a hybnosť stredného kontajnera po vystrelení striel
- v_1', p_1', v_3', p_3' rýchlosť a hybnosť predného resp. zadného kontajnera po náraze striel do kontajnerov

Ak sa kontajner na dráhe pohybuje vodorovne priamočiario, výsledná sila, ktorá naňho pôsobí, môže mať jedine smer rovnobežný s dráhou. Zo zadania však vieme, že v tomto smere nepôsobia na pohybujúci sa kontajner žiadne sily. Takže výsledná sila, ktorá pôsobí pri pohybe na každý z kontajnerov, je nulová. Preto kontajnery zotrávajú v rovnomernom priamočiarom pohybe a ich celková hybnosť sa nemení – tvoria izolovanú sústavu.

Ak sa kontajnery pohybujú pred vystrelením striel rýchlosťou v vzhľadom na povrch planéty, ich hybnosti sú: $p_1 = m_1 \cdot v$, $p_2 = m_2 \cdot v$ a $p_3 = m_3 \cdot v$. Ak sa strely po výstrele pohybujú rýchlosťou v_s ($v_s > v$) vzhľadom na stredný kontajner, vzhľadom na povrch planéty sa pohybujú rýchlosťou $v_s + v$ smerom dopredu, resp. rýchlosťou $v_s - v$ smerom dozadu, a ich hybnosti sú $p_{\text{pred}} = m_s \cdot (v_s + v)$ v smere dopredu a $p_{\text{zad}} = m_s \cdot (v_s - v)$ v smere dozadu.

a) Hybnosť stredného kontajnera po vystrelení striel bude $p_2' = (m_2 - 2 \cdot m_s) \cdot v_2'$. Sústavu (stredný kontajner a obidve strely) môžeme pri výstrele považovať za izolovanú sústavu, a preto jej celková hybnosť je pred aj po výstrele rovnaká. Platí teda $p_2 = p_2' + p_{\text{pred}} - p_{\text{zad}}$, čiže $m_2 \cdot v = (m_2 - 2 \cdot m_s) \cdot v_2' + m_s \cdot (v_s + v) - m_s \cdot (v_s - v) = (m_2 - 2 \cdot m_s) \cdot v_2' + 2 \cdot m_s \cdot v$. Po úprave je $(m_2 - 2 \cdot m_s) \cdot v = (m_2 - 2 \cdot m_s) \cdot v_2'$ a z toho vyplýva, že $v_2' = v$. Teda rýchlosť stredného kontajnera po vystrelení striel je rovnaká ako pôvodná rýchlosť v .

Akonáhle strely opustia stredný kontajner, nepôsobia naňho už žiadne sily, a preto sa ďalej pohybuje stálou rýchlosťou $v_2' = v$ – aj po náraze striel do zvyšných dvoch kontajnerov.

Po tom, čo obe strely vrazia do zvyšných dvoch kontajnerov, bude rýchlosť stredného kontajnera taká istá ako jeho rýchlosť pred vystrelením striel.

b) Predný aj zadný kontajner sa pohybuje pôvodnou rýchlosťou v až do momentu, keď doňho vrazí strela, a až do tohto momentu je vzdialený od stredného kontajnera o tú istú vzdialenosť d . Túto vzdialenosť preletia obe strely za rovnaký čas $t = d / v_s$; a keďže boli vystrelené súčasne, tak súčasne aj narazia do kontajnerov.

Pri náraze strely do kontajnera môžeme považovať sústavu (kontajner a strela) za izolovanú – jej celková hybnosť sa pri náraze nezmení. Pritom vieme, že po náraze sa strela pohybuje spolu s kontajnerom, čiže majú tú istú rýchlosť. Takže platí: pre predný kontajner $p_1' = p_1 + p_{\text{pred}}$, čiže $(m_1 + m_s) \cdot v_1' = m_1 \cdot v + m_s \cdot (v_s + v)$, a pre zadný $p_3' = p_3 - p_{\text{zad}}$, čiže $(m_3 + m_s) \cdot v_3' = m_3 \cdot v - m_s \cdot (v_s + v)$. Z toho vyjadříme rýchlosti predného a zadného kontajnera po náraze striel: $v_1' = (m_1 \cdot v + m_s \cdot (v_s + v)) / (m_1 + m_s) = v + m_s \cdot v_s / (m_1 + m_s)$ a $v_3' = (m_3 \cdot v - m_s \cdot (v_s + v)) / (m_3 + m_s) = v - m_s \cdot v_s / (m_1 + m_s)$. Vidíme, že rýchlosť predného kontajnera v_1' je väčšia ako rýchlosť zadného kontajnera v_3' . Preto sa ich vzájomná vzdialenosť bude postupne zväčšovať – za čas t_1 sa zväčší o $d_1 = (v_1' - v_3') \cdot t_1 = ((v + m_s \cdot v_s / (m_1 + m_s)) - (v - m_s \cdot v_s / (m_1 + m_s))) \cdot t_1 = (2 \cdot m_s \cdot v_s / (m_1 + m_s)) \cdot t_1$.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme, že v čase $t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ po náraze striel do kontajnerov bude vzájomná vzdialenosť predného a zadného kontajnera **väčšia o** $d_1 = (2 \cdot 0,02 \text{ kg} \cdot 600 \text{ m/s} / (1000 \text{ kg} + 0,02 \text{ kg})) \cdot 60 \text{ s} = 2 \cdot 0,012 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = \mathbf{1,44 \text{ m}}$.

Minútu po náraze strely do predného kontajnera bude vzájomná vzdialenosť predného a zadného kontajnera o 1,44 m väčšia než pred vystrelením striel.