



6. ročník

fyzIQ

kat. K

Vzorové riešenia

6. séria pre žiakov kvarty OG

- A: $R_1 = 4 \Omega$. Vtedy je buď $R_2 = 12 \Omega$ a $R_3 = 16 \Omega$, alebo naopak, – tak či tak je celkový odpor zapojenia $R = 1 / (1 / (4 \Omega) + 1 / (12 \Omega + 16 \Omega)) = 1 / ((7+1) / (28 \Omega)) = 28 \Omega / 8 = 3,5 \Omega$.
- B: $R_1 = 12 \Omega$ – vtedy je celkový odpor $R = 1 / (1 / (12 \Omega) + 1 / (4 \Omega + 16 \Omega)) = \dots = 7,5 \Omega$.
- C: $R_1 = 16 \Omega$ – vtedy je celkový odpor $R = 1 / (1 / (16 \Omega) + 1 / (4 \Omega + 12 \Omega)) = \dots = 8 \Omega$.

a) Podľa zadania je celkový odpor rezistorov pri Danovom zapojení $7,5 \Omega$. Z výpočtov vyplýva, že toto môže nastať len v takom prípade, keď odpor rezistora R_1 je **12 Ω**.
Odpor rezistora R_1 pri Danovom zapojení je 12 Ω.

b) Žofia môže dostať menší celkový odpor jedine tak, že do samostatnej vetvy ako R_1 zaradiť rezistor s odporom 4Ω – v takom prípade bude celkový odpor zapojenia **3,5 Ω**.
Celkový odpor Žofiinho zapojenia bol 3,5 Ω.

Správne odpovede: a) B: 12 Ω b) 3,5 Ω
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 1 bod za hodnotu v intervale od 3,49 do 3,51 v b)
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤

Označme si:
 m_m hmotnosť jednej mince g = 10 N/kg
 m_z hmotnosť závažia
 a dĺžka ramena váh (od osi otáčania po miesto, kde je zavesená miska)
 F sila, ktorou pôsobí rameno váh na špagát prevesené cez kladku

Šebestová zistila, že váhy sú v rovnováhe, keď je na jednej miske položené závažie a na druhej 60 mincí. Z toho vyplýva, že hmotnosť závažia je rovnaká ako hmotnosť 60 mincí – $m_z = 60 \cdot m_m$. A ako vlastne vyzerá situácia popísaná v zadani? Na ľavej miske váh je 50 mincí, preto na ľavé rameno váh pôsobí sila $F_L = 50 \cdot m_m \cdot g$ smerom nadol, vo vzdialenosti a od osi otáčania, a jej moment je $M_L = 50 \cdot m_m \cdot g \cdot a$. Na pravej miske váh je položené závažie, preto na pravé rameno váh pôsobí sila $F_{P1} = m_z \cdot g$ smerom nadol, vo vzdialenosti a od osi otáčania, a jej moment je $M_{P1} = m_z \cdot g \cdot a$. Ďalej na pravé rameno váh pôsobí špagát silou F_{P2} smerom nahor, vo vzdialenosti a/2 od osi otáčania. Z podmienky pre rovnováhu na pevnej kladke vyplýva, že gravitačná sila, ktorá pôsobí na zavesené závažie, musí byť rovnako veľká ako sila F, ktorou na špagát pôsobí rameno váh – platí teda $F = m_z \cdot g$. Pritom sila F má rovnakú veľkosť (a opačný smer) ako sila F_{P2} , a preto $F_{P2} = F = m_z \cdot g$. Moment sily F_{P2} je $M_{P2} = F_{P2} \cdot a/2 = m_z \cdot g \cdot a/2 = M_{P1} / 2$. Momenty M_{P1} a M_{P2} majú navzájom opačný smer, a preto výsledný moment pôsobiaci na pravé rameno váh má veľkosť $M_P = M_{P1} - M_{P2} = m_z \cdot g \cdot a - m_z \cdot g \cdot a/2 = m_z \cdot g \cdot a/2$ a smer rovnaký ako moment M_{P1} .

a) Stačí len porovnať momenty M_L a M_P – ak je väčší moment M_L , váhy sa naklonia na ľavú stranu, a naopak. Už vieme, že $m_z = 60 \cdot m_m$, a tak $M_P = 60 \cdot m_m \cdot g \cdot a/2 = 30 \cdot m_m \cdot g \cdot a$, a to je menej ako $M_L = 50 \cdot m_m \cdot g \cdot a$. Preto váhy boli vychýlené tak, že **ľavá miska bola nižšie ako pravá**.

b) Rovnaké momenty ako v situácii v časti a) by na ramená váh pôsobili, keby bolo na pravej miske položených 30 mincí, na ľavej 50, a nebol by na rameno priviazaný špagát s ďalším závažím. Takže ak Šebestová doloží na pravú misku 20 mincí, váhy budú opäť v rovnováhe. Zvyšných 30 mincí je potom treba rozdeliť na obe misky rovnomerne – na každú po 15 mincí. Takže **Šebestová položila na ľavú misku 15 mincí a na pravú 35 mincí**.

Správne odpovede: a) A: ľavá nižšie b) na ľavú 15, na pravú 35
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

①

Označme si:
 $R_{zvon} = 1,6 \Omega$ odpor zvončeka P_{zvon} príkon zvončeka
 $R_{vod} = 4,8 \Omega$ odpor spojovacích vodičov P_{celk} celkový príkon obvodu
 R_{celk} celkový odpor obvodu I prúd prechádzajúci obvodom
 U, U_{zvon} napätie medzi svorkami batérie, resp. medzi svorkami zvončeka
 $S_1 = 0,5 \text{ mm}^2$ prierez pôvodných vodičov medzi kuchyňou a bráničkou
 $S_2 = 1,0 \text{ mm}^2$ prierez nových vodičov medzi kuchyňou a bráničkou

Príkon zvončeka môžeme vypočítať podľa vzťahu $P_{zvon} = U_{zvon} \cdot I$. Pritom podľa Ohmovho zákona platí, že $U_{zvon} = R_{zvon} \cdot I$. Takže pre príkon zvončeka platí $P_{zvon} = R_{zvon} \cdot I^2$.

a) Podobne ako príkon zvončeka môžeme vyjadriť aj celkový príkon obvodu:
 $P_{celk} = R_{celk} \cdot I^2$. Pritom celkový odpor obvodu pozostáva jednak z odporu zvončeka R_{zvon} , jednak z odporu spojovacích vodičov R_{vod} (odpory ostatných častí obvodu sú podľa zadania zanedbateľné) – platí teda $R_{celk} = R_{zvon} + R_{vod}$, a potom $P_{celk} = (R_{zvon} + R_{vod}) \cdot I^2$.
 Percentuálny podiel príkonu zvončeka na celkovom príkone obvodu je $P_{zvon} / P_{celk} \cdot 100\%$.
 Po dosadení predchádzajúcich výrazov za P_{zvon} a P_{celk} dostaneme
 $P_{zvon} / P_{celk} \cdot 100\% = ((R_{zvon} \cdot I^2) / (R_{celk} \cdot I^2)) \cdot 100\% = R_{zvon} / (R_{zvon} + R_{vod}) \cdot 100\%$,
 a pre zadané číselné hodnoty R_{zvon} a R_{vod} výjde podiel príkonu zvončeka na celkovom príkone obvodu $P_{zvon} / P_{celk} \cdot 100\% = 1,6 \Omega / (1,6 \Omega + 4,8 \Omega) \cdot 100\% = 1,6 / 6,4 \cdot 100\% = 25\%$.
Príkon zvončeka tvorí 25 % z celkového príkonu obvodu.

b) Vieme, že odpor zvončeka R_{zvon} a napätie medzi svorkami batérie U by sa pri výmene vodičov nezmenili. Ostatné veličiny budeme označovať dodatkovým indexom 1 alebo 2 podľa toho, na ktorý prípad sa vzťahujú: 1 pre pôvodné vodiče, 2 pre nové vodiče. Z Ohmovho zákona je prúd v obvode $I_1 = U / R_{celk1} = U / (R_{zvon} + R_{vod1})$. Príkon zvončeka potom môžeme vyjadriť ako $P_{zvon1} = R_{zvon1} \cdot I_1^2 = R_{zvon} \cdot (U / (R_{zvon} + R_{vod1}))^2$. Rovnakým spôsobom dostaneme aj $P_{zvon2} = R_{zvon2} \cdot I_2^2 = R_{zvon} \cdot (U / (R_{zvon} + R_{vod2}))^2$.
 Vieme, že ak sa prierez vodiča k-krát zväčší, tak sa jeho odpor k-krát zmenší. To znamená, že $R_{vod2} = R_{vod1} / k$. Pritom zrejme $k = S_2 / S_1$, a teda $R_{vod2} = R_{vod1} / (S_2 / S_1)$. Potom je príkon zvončeka po výmene vodičov $P_{zvon2} = R_{zvon} \cdot (U / (R_{zvon} + R_{vod1} / (S_2 / S_1)))^2$. Z toho pomer $P_{zvon2} / P_{zvon1} = (R_{zvon} \cdot U^2 / (R_{zvon} + R_{vod1} / (S_2 / S_1))^2) / (R_{zvon} \cdot U^2 / (R_{zvon} + R_{vod1})^2) = (1 / (R_{zvon} + R_{vod1} / (S_2 / S_1))^2) / (1 / (R_{zvon} + R_{vod1})^2) = (R_{zvon} + R_{vod1})^2 / (R_{zvon} + R_{vod1} / (S_2 / S_1))^2$.
 Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme:
 $P_{zvon2} / P_{zvon1} = (1,6 \Omega + 4,8 \Omega)^2 / (1,6 \Omega + 4,8 \Omega / (1,0 \text{ mm}^2 / 0,5 \text{ mm}^2))^2$
 $P_{zvon2} / P_{zvon1} = (6,4 \Omega)^2 / (1,6 \Omega + 2,4 \Omega)^2 = (6,4 / 4,0)^2 = 1,6^2 = 2,56$.
 To znamená, že **príkon zvončeka by sa zväčšil 2,56-krát**.

Správne odpovede: a) 25 % b) 2,56-krát
Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
 1 bod za hodnotu v intervale od 2,54 do 2,58 v b)
 0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

Ak teleso voľne pláva na hladine kvapaliny, pôsobia naňho súčasne gravitačná sila F_g a vztlaková sila F_{vz} , pričom tieto dve sily sú v rovnováhe – ich veľkosti sú rovnaké.

a) Označme si:

m_1, m_2 hmotnosť plte (so všetkým čo je na nej) pred a po vplávaní do mora
 V_1, V_2 objem ponorenej časti plte pred vplávaním (V_1) a po vplávaní (V_2) do mora
 $\rho_{sladká}$ hustota „sladkej“ vody v Dunaji
 $\rho_{slaná}$ hustota „slanej“ vody v mori $g = 10 \text{ N/kg}$

Pred vplávaním do mora pôsobí na plť gravitačná sila $F_{g1} = m_1 \cdot g$ a vztlaková sila F_{vz1} , ktorej veľkosť určíme z Archimedovho zákona: $F_{vz1} = V_1 \cdot \rho_{sladká} \cdot g$. Tieto dve sily sú v rovnováhe, čiže platí $F_{g1} = F_{vz1}$. Podobne po vplávaní do mora pôsobí na plť gravitačná sila $F_{g2} = m_2 \cdot g$ a vztlaková sila $F_{vz2} = V_2 \cdot \rho_{slaná} \cdot g$ a platí $F_{g2} = F_{vz2}$. Zo zadania vieme, že odkedy sa Vojtovi minuli zásoby (deň pred vplávaním do mora), sa hmotnosť jeho plte nemenila. Preto pred aj po vplávaní do mora pôsobila na plť rovnaká gravitačná sila: $F_{g1} = m_1 \cdot g = m_2 \cdot g = F_{g2}$. To ale znamená, že aj vztlaková sila, ktorá pôsobila na plť pri vplávaní do mora, musela byť pred aj po vplávaní rovnaká: $F_{vz1} = F_{g1} = F_{g2} = F_{vz2}$. Teda musí platiť $V_1 \cdot \rho_{sladká} \cdot g = V_2 \cdot \rho_{slaná} \cdot g$. Pritom vieme, že hustota „slanej“ vody v mori je väčšia ako hustota „sladkej“ vody v Dunaji: $\rho_{sladká} < \rho_{slaná}$. Preto objem ponorenej časti plte v „sladkej“ vode (V_1 pred vplávaním) musí byť väčší ako v „slanej“ vode (V_2 po vplávaní) – ináč by nemohlo platiť súčasne $\rho_{sladká} < \rho_{slaná}$ aj $V_1 \cdot \rho_{sladká} \cdot g = V_2 \cdot \rho_{slaná} \cdot g$.

Objem ponorenej časti plte bol väčší pred vplávaním do mora než po vplávaní.

b) Označme si:

m, V hmotnosť a objem smrekových kmeňov
 V_{ponor} objem ponorenej časti kmeňov
 $p = ?$ koľko percent z objemu kmeňov vyčnieva nad hladinou
 $\rho_{drevo} = 650 \text{ kg/m}^3$ hustota smrekového dreva
 $\rho_{voda} = 1000 \text{ kg/m}^3$ hustota vody $g = 10 \text{ N/kg}$

Na kmene, voľne plávajúce na hladine Váhu, pôsobí jednak gravitačná sila F_g – jej veľkosť je $F_g = m \cdot g = V \cdot \rho_{drevo} \cdot g$ – jednak vztlaková sila F_{vz} – jej veľkosť je $F_{vz} = V_{ponor} \cdot \rho_{voda} \cdot g$. Ak sú tieto sily v rovnováhe, musí platiť $V \cdot \rho_{drevo} \cdot g = V_{ponor} \cdot \rho_{voda} \cdot g$, čiže $V \cdot \rho_{drevo} = V_{ponor} \cdot \rho_{voda}$. Z tejto rovnice vyjadríme objem ponorenej časti kmeňov: $V_{ponor} = V \cdot \rho_{drevo} / \rho_{voda}$ – percentuálne to je $(V_{ponor} / V) \cdot 100\% = (\rho_{drevo} / \rho_{voda}) \cdot 100\%$ z objemu kmeňov. Zvyšná časť objemu kmeňov vyčnieva nad hladinou – to je $p = 100\% - (\rho_{drevo} / \rho_{voda}) \cdot 100\%$ z objemu kmeňov.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme, že $p = 100\% - (650 \text{ kg/m}^3 / 1000 \text{ kg/m}^3) \cdot 100\% = 100\% - 0,65 \cdot 100\% = 35\%$.

Nad hladinou vyčnievalo 35% z objemu kmeňov.

Správne odpovede: a) A: väčší pred vplávaním b) 35%

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď 0 bodov za nesprávnu odpoveď

③

Označme si:

$R_1 = 90 \Omega, R_2 = 10 \Omega$ odpory rezistorov zapojených v obvode
 $R_A = 1 \Omega$ vnútorný odpor ampérmetra
 $U = 4,5 \text{ V}$ napätie medzi svorkami batérie
 I prúd prechádzajúci ampérmetrom s vnútorným odporom R_A
 I' prúd prechádzajúci ampérmetrom s nulovým vnútorným odporom

To, že ampérmeter má vnútorný odpor R_A , znamená, že sa správa (z hľadiska prúdu, ktorý ním prechádza) ako rezistor s odporom R_A .

a) Prúd prechádzajúci ampérmetrom pri zapojení podľa schémy 1 je vlastne celkový prúd, ktorý prechádza obvodom pri tomto zapojení. Ten určíme pomocou Ohmovho zákona, ak budeme poznať celkový odpor obvodu.

Pre celkový odpor rezistorov R_1 a R_2 spojených paralelne platí $1/R_{par} = 1/R_1 + 1/R_2$, čiže $R_{par} = 1 / (1/R_1 + 1/R_2)$. Ampérmeter je k nim zapojený do série, preto celkový odpor obvodu je $R = R_A + R_{par} = R_A + 1 / (1/R_1 + 1/R_2)$ a prechádza ním (ampérmetrom aj celým obvodom) celkový prúd $I = U / R = U / (R_A + 1 / (1/R_1 + 1/R_2))$.

Ak je vnútorný odpor ampérmetra nulový, je celkový odpor obvodu $R' = R_{par} = 1 / R_1 + 1 / R_2$, čiže menší (nanajvýš rovný) ako R . Preto v tomto prípade bude prechádzať ampérmetrom väčší prúd I' , ktorého veľkosť je $I' = U / R' = U / (1/R_1 + 1/R_2)$. Rozdiel medzi veľkosťou prúdu, ktorý prechádza ampérmetrom v jednom a v druhom prípade, je potom $I' - I$, pričom $I' - I = U / (1 / (1/R_1 + 1/R_2)) - U / (R_A + 1 / (1/R_1 + 1/R_2))$.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme, že prúd I je menší oproti prúdu I' o $I' - I = 4,5 \text{ V} / (1 / (1/90 \Omega) + 1/(10 \Omega)) - 4,5 \text{ V} / (1 \Omega + 1 / (1/90 \Omega) + 1/(10 \Omega)) = 4,5 \text{ V} / (1 / (10/90 \Omega)) - 4,5 \text{ V} / (1 \Omega + 90 \Omega / 10) = 4,5 \text{ V} / 9 \Omega - 4,5 \text{ V} / 10 \Omega = 0,5 \text{ A} - 0,45 \text{ A} = 0,05 \text{ A} = 50 \text{ mA}$.

b) Pri zapojení podľa schémy 2 si stačí uvedomiť, že napätie medzi uzlami je rovnaké ako napätie U medzi svorkami batérie, ktoré poznáme.

Pri tomto zapojení prechádza ampérmetrom len prúd, ktorý prechádza vetvou, v ktorej sa nachádza rezistor R_1 – ampérmeter je k nemu zapojený do série. Celkový odpor tejto vetvy je $R = R_1 + R_A$ a napätie medzi jej koncami (=uzlami) je U , takže podľa Ohmovho zákona prechádza touto vetvou (teda aj ampérmetrom) prúd $I = U / R = U / (R_1 + R_A)$.

V prípade, že odpor ampérmetra je nulový, je odpor tejto vetvy len R_1 , a prechádza ňou (aj ampérmetrom) prúd $I' = U / R_1$. Opäť porovnáme hodnoty I a I' a zistíme, že ampérmetrom prechádza v prípade, že jeho vnútorný odpor je R_A , o $I' - I = U / R_1 - U / (R_1 + R_A)$ menší prúd, než keby bol jeho vnútorný odpor nulový.

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme, že prúd I je menší oproti prúdu I' o $I' - I = 4,5 \text{ V} / 90 \Omega - 4,5 \text{ V} / (90 \Omega + 1 \Omega) = 0,05 \text{ A} - (4,5 / 91) \text{ A} = 0,0005495 \text{ A} = 0,55 \text{ mA}$.

Správne odpovede:

a) C: o 50 mA menší

b) C: o 0,55 mA menší

Bodovanie:

2 body za správnu odpoveď

2 body za C s hodnotu v intervale od 0,54 do 0,56 v b)

1 bod za C s nesprávnou číselnou hodnotu v a) aj v b)

1 body za A s hodnotu 50 mA v a)

1 body za A s hodnotu v intervale od 0,54 do 0,56 v b)

0 bodov za nesprávnu odpoveď

④

Vyjadrime si celkový odpor Danovho zapojenia. Odpor vetvy, v ktorej sú zapojené do série rezistory R_2 a R_3 , je $R_{23} = R_2 + R_3$. Pre odpor celého zapojenia – paralelného spojenia dvoch vetiev s odpormi R_1 a R_{23} – potom bude platiť $1/R = 1/R_1 + 1/R_{23} = 1/R_1 + 1/(R_2 + R_3)$, a teda celkový odpor Danovho zapojenia je $R = 1 / (1/R_1 + 1/(R_2 + R_3))$.

Vidíme, že ak by sa medzi sebou vymenili rezistory R_2 a R_3 , celkový odpor zapojenia by sa nezmenil. To znamená, že pri vymieňaní všetkých troch rezistorov medzi sebou môžeme dostať len tri rôzne hodnoty celkového odporu – podľa toho, ktorý rezistor by bol zapojený v samostatnej vetve (ako R_1). Pre každú možnosť vypočítame celkový odpor zapojenia a získané hodnoty porovnáme so zadanou hodnotou celkového odporu pri Danovom zapojení.

Ak sú odpory jednotlivých rezistorov 4 Ω , 12 Ω a 16 Ω , môžu nastať tieto tri možnosti: