b) Rozchod koľajníc je d = 1435 mm. Uhol, ktorý zvierajú koľajnice s vodorovnou rovinou, je α. Z pravouhlého trojuholníku vieme, že prevýšenie vyššej koľajnice oproti vodorovnej rovine obsahujúcej spodnú koľajnicu bude
$h = d \, . \sin \alpha$
$h \approx 143{,}89$ mm.
Ak je rozchod koľajníc 1 435 mm, vnútorná koľajnica by musela byť uložená o 143,89 mm nižšie ako vonkajšia.

Správne odpovede: **a) 5,75 °** **b) 143,89 mm**

Bodovanie:
2 body za správnu odpoveď
2 body za 143,77 mm v b), ak je v a) presne 5,75 °
1 bod za hodnotu v intervale od 5,74 ° do 5,76 ° v a)
1 bod za hodnotu v intervale od 143,7 mm do 144 mm v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

⑤

a) Označme si:
m .... hmotnosť škriatka
M .... hmotnosť saní
f .... koeficient trenia medzi saňami a snehom
F .... maximálna sila, akou dokáže ťahať jeden škriatok
Ak sa na sane posadí jeden škriatok, ich spoločná tiažová sila bude $F_N = (M + m).g$. Najväčšia trecia sila, aká môže byť medzi saňami a snehom, bude násobkom tejto tiažovej sily (ktorá je taká istá, ako tlaková sila saní na sneh) a koeficientu trenia. Zo zadania vieme, že škriatok dokáže vyvinúť práve takú silu, aby sa pohli sane s jedným škriatkom, táto sila teda bude rovná maximálnej trecej sile saní o sneh (s jedným škriatkom na palube).
$F = F_N \, . \, f = (M + m) \, . \, g \, . \, f = 88{,}2$ N
Škriatok dokáže ťahať najväčšou silou 88,2 N.

b) Označme si ešte N – počet škriatkov, ktorí sa na saniach budú viezť. Potom bude tiažová sila saní (aj so škriatkami) spolu:
$F_{N2} = (M + m \, . \, N) \, . \, g$
Trecia sila, ktorú budú musieť zvyšní prekonávať, bude táto sila vynásobená koeficientom trenia, podobne, ako v predošlom prípade:
$F_t = f \, . \, F_{N2} = (M + m \, . \, N) \, . \, g \, . \, f$
Túto treciu silu bude musieť prekonať zvyšných (20 – N) škriatkov, ktorí zostali mimo saní. Každý z nich dokáže ťahať silou F (ako sme vypočítali v časti a)) preto musí platiť:
$(20 - N) \, . \, F \geq F_t$
$(20 - N) \, . \, (M + m) \, . \, g \, . \, f \geq (M + m \, . \, N) \, . \, g \, . \, f$
$(20 - N) \, . \, (M + m) = 20 \, . \, (M + m) - N \, . \, (M + m) \geq M + m \, . \, N$
$20 \, . \, (M + m) - M \geq m \, . \, N + N \, . \, (M + m)$
$(19 \, . \, M + 20 \, . \, m) \geq N \, . \, (M + 2 \, . \, m)$
$N \leq (19 \, . \, M + 20 \, . \, m)/(M + 2 \, . \, m) = 2880 \text{ kg} / 180 \text{ kg} = 16$
Na saniach sa môže viezť maximálne 16 z týchto dvadsiatich škriatkov.

Správne odpovede: **a) 88,2 N** **b) 16 škriatkov**

Bodovanie:
2 body za správnu odpoveď
1 bod za hodnotu v intervale od 88,2 N do 88,3 N v a)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

P-MATn.o.

6. ročník fyzIQ

kat. S2

Vzorové riešenia

5. séria pre žiakov 2. ročníka SŠ a sexty gymnázia

①

a) Označme si:
$p_0 = 101{,}25$ kPa .... tlak v hrnci na začiatku (i tlak v miestnosti naokolo)
p_1 .... tlak v hrnci po vychladnutí
$T_0 = 80$ °C = 353,15 K .... teplota v hrnci za začiatku
$T_1 = 20$ °C = 293,15 K .... teplota v hrnci po vychladnutí

Počas chladnutia prechádza vzduch v zavretom hrnci izochorickým dejom, pretože jeho objem ani množstvo (tým sa myslí látkové množstvo alebo hmotnosť) sa nemenia. Zo stavovej rovnice $p \, . \, V = n \, . \, R_m \, . \, T$ vyplýva, že podiel tlaku a teploty v hrnci zostáva počas chladnutia rovnaký (všimnite si, že ostatné veličiny v stavovej rovnici sa nemenia). Teda:
$p_0 / T_0 = p_1 / T_1$ $\qquad$ $p_1 = p_0 \, . \, (T_1 / T_0)$
$p_1 = 101{,}25 \text{ kPa} \, . \, (293{,}15 \text{ K} / 353{,}15 \text{ K}) \approx$ **84,05 kPa**
Po vychladnutí bude tlak v hrnci 84,05 kPa.

b) Označme si ešte:
r = 0,1 m .... polomer pokrievky
S .... plocha pokrievky
F .... sila, ktorou musí Evka pôsobiť, aby pokrievku od hrnca odtrhla

Vnútri hrnca je menší tlak ako vonku, preto na pokrievku zvonku pôsobí tlaková sila. Jej veľkosť sa rovná súčinu plochy, na ktorú pôsobí, a rozdielu tlakov medzi jednou a druhou stranou tejto plochy. Vieme, že $S = \pi \, . \, r^2$. Tlaková sila bude mať teda veľkosť
$F_{tlak} = (p_0 - p_1) \, . \, S = (p_0 - p_0 \, . \, (T_1 / T_0)) \, . \, \pi \, . \, r^2$.
Na to, aby Evka odtrhla pokrievku od hrnca, musí na ňu pôsobiť aspoň takou silou, aká pôsobí na pokrievku smerom dovnútra hrnca, teda najmenej silou $F = F_{tlak}$. Jej veľkosť, po dosadení zadaných číselných hodnôt, je
$F = F_{tlak} = (101{,}25 \text{ kPa} - 101{,}25 \text{ kPa} \, . \, (293{,}15 \text{ K} / 353{,}15 \text{ K})) \, . \, 3{,}14 \, . \, (0{,}1 \text{ m})^2 \approx 0{,}54$ kN.
Evka by musela pôsobiť silou 0,54 kN.

Správna odpoveď: **a) 84,05 kPa** **b) 0,54 kN**

Bodovanie:
2 body za správnu odpoveď
1 bod za 84 kPa v a)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

②

a) Označme si:

t_1 = 10°C .... začiatočná teplota vody v kadi
t_2 = 100 °C .... začiatočná teplota sochy
t_3 = 20 °C .... konečná teplota sochy aj vody v kadi po ustálení
c_{voda} = 4,2 kJ/(kg.ºC) .... merná tepelná kapacita vody
$c_{hliník}$ = 0,9 kJ/(kg.ºC) .... merná tepelná kapacita hliníka
m_V .... hmotnosť vody v kadi
m_S .... hmotnosť sochy

Pre tepelnú výmenu, ktorá prebehne po ponorení sochy do vody v kadi, platí kalorimetrická rovnica:

$m_V \,.\, c_{voda} \,.\, (t_3 - t_1) = m_S \,.\, c_{hliník} \,.\, (t_2 - t_3)$

Z tejto rovnice si vyjadríme pomer hmotnosti vody ku hmotnosti sochy:

$m_V : m_S = (c_{hliník} \,.\, (t_2 - t_3)) : (c_{voda} \,.\, (t_3 - t_1))$

Po dosadení zadaných číselných hodnôt dostaneme:

$m_V : m_S$ = (0,9 kJ/(kg.ºC) . (100 °C – 20 °C)) : (4,2 kJ/(kg.ºC) . (20 °C – 10 °C)) = 72 : 42

$m_V : m_S$ = **12 : 7**.

Pomer hmotnosti vody ku hmotnosti sochy bol 12 : 7.

b) Označme si ešte:

t_4 = 46°C .... teplota druhej sochy pred ponorením do vody v kadi
t_5 .... konečná teplota oboch sôch a vody v kadi po ustálení

Po ponorení druhej sochy do vody v kadi prebehla medzi oboma sochami a vodou tepelná výmena, ktorú môžeme popísať rovnicou:

$m_S \,.\, c_{hliník} \,.\, (t_5 - t_3) + m_V \,.\, c_{voda} \,.\, (t_5 - t_3) = m_S \,.\, c_{hliník} \,.\, (t_4 - t_5)$

Ak túto rovnicu predelíme hmotnosťou sochy m_S (a namiesto m_V napíšeme pomer $m_V : m_S$), dostaneme

$c_{hliník} \,.\, t_5 - c_{hliník} \,.\, t_3 + (m_V : m_S) \,.\, c_{voda} \,.\, t_5 - (m_V : m_S) \,.\, c_{voda} \,.\, t_3 = c_{hliník} \,.\, t_4 - c_{hliník} \,.\, t_5$

Z tejto rovnice môžeme vyjadriť konečnú teplotu t_5:

$t_5 = (c_{hliník} \,.\, t_4 + c_{hliník} \,.\, t_3 + (m_V : m_S) \,.\, c_{voda} \,.\, t_3) / (c_{hliník} + c_{hliník} + (m_V : m_S) \,.\, c_{voda})$

Po dosadení číselných hodnôt (z časti a) vieme, že $m_V : m_S$ = 12 : 7) dostaneme

t_5 = (0,9 kJ/(kg.ºC) . 46 ºC + 0,9 kJ/(kg.ºC) . 20 ºC + (12 : 7) . 4,2 kJ/(kg.ºC) . 20 ºC) /
/ (0,9 kJ/(kg.ºC) + 0,9 kJ/(kg.ºC) + (12 : 7) . 4,2 kJ/(kg.ºC)) = (203,4 / 9) ºC = **22,6 ºC**.

Výsledná teplota vody (aj oboch sôch) bola 22,6 ºC.

Správna odpoveď: **a) 12 : 7** **b) 22,60 °C**

Bodovanie: **2 body** za správnu odpoveď
0 bodov za nesprávnu odpoveď

③

a) Označme si:

v = 100 m.s^{-1} .... rýchlosť delovej gule
h = 39 m .... výška hradieb
l .... vzdialenosť, do ktorej treba delá postaviť
T .... čas letu gule
α .... uhol, pod ktorým delostrelci musia vystreliť

Zvislá zložka rýchlosti gule je v_y = v . sin α, vodorovná zložka je v_x = v . cos α. Ak majú gule do hradieb naraziť vodorovne, musí sa počas letu znížiť zvislá zložka rýchlosti na nulu. Jediné, čo mení zvislú zložku rýchlosti, je gravitačné zrýchlenie, preto musí platiť:

v . sin α = g . T

Vodorovná zložka rýchlosti sa nemení, guľa ňou prekoná vodorovnú vzdialenosť l za čas T:

v . cos α = l / T

Nakoniec, vieme, že guľa za svojho letu vystúpi do výšky h, no a čo sa týka zvislej zložky pohybu, koná rovnomerne spomalený pohyb:

h = v . sin α . T – ½ g . T^2

Z prvej rovnice v . sin α = g . T:

h = g . T^2 – ½ g . T^2 = ½ g . T^2

Z toho vyjadríme

T = √(2h / g)

Teraz si už môžeme vyjadriť vzdialenosť l aj uhol α. Z pytagorovej vety

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ = (v . sin α)^2 + (v . cos α)^2

v^2 = (g . T)^2 + (l / T)^2 = g^2 . (2h / g) + l^2 / (2h / g) = 2.g.h + g.l^2 / 2h

2.h.v^2/g = 4.h^2 + l^2

l = √(2.h.v^2/g – 4.h^2) ≈ 271,12 m ≈ 0,27 km.

Delá je treba postaviť do vzdialenosti 0,27 km od hradieb.

b) Uhol α vyjadríme z niektorej z rovníc, napríklad

v . sin α = g . T sin α = g . T / v = g . √(2h / g) / v = √(2.g.h) / v

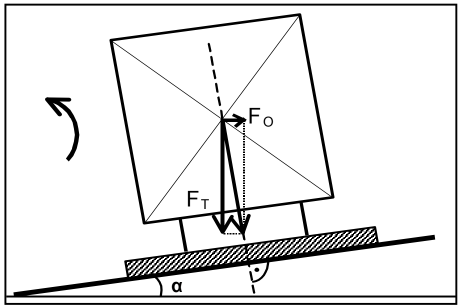
α = arcsin(√(2.g.h) / v) ≈ 16,05º

Delostrelci majú strieľať pod uhlom 16,05 º.

Správne odpovede: **a) 0,27 km** **b) 16,05 °**

Bodovanie: **2 body** za správnu odpoveď
2 body za 0,271 km v a)
2 body za 16,06 ° v b)
1 bod za 0,28 km v a)
1 bod za 271,12 km v a)
1 bod za hodnotu v intervale od 16 ° do 16,1 ° v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

④



a) Označme si:

m .... hmotnosť vlaku
r = 2 km .... polomer zákruty
v = 160 km.h^{-1} .... rýchlosť vlaku v zákrute

Tiažová sila vlaku bude rovná

F_T = m . g

Odstredivá sila pôsobiaca na vlak (v sústave spojenej s vlakom) bude F_O = m . v^2 / r

Výslednica týchto dvoch síl bude od zvislice odchýlená o uhol α, pričom:

tg α = F_O/F_T tg α = v^2 / (r . g)

Ak má byť táto sila kolmá na koľajnice, musia koľajnice zvierať rovnaký uhol s vodorovnou rovinou, teda vlastne uhol α bude odporúčané klopenie trate. Teda:

α = arctg(v^2 / (r . g)) = arctg((160 / 3,6)^2 / (2000 . 9,8)) ≈ 5,75º.

V takejto zákrute by bolo odporúčané klopenie 5,75 °.