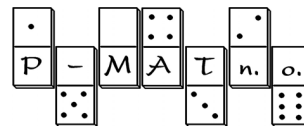


⑤ a) Odkedy kôň začal zrýchľovať, až kým dobehol vlak, prešiel Joe na koni dráhu $s_J = 60$ m a vlak o 6 m menej, teda $s_V = 54$ m. Využijeme to, že obaja mali na prejdeň svojej dráhy rovnaký čas t . Vlak sa pohyboval rýchlosťou v_V , preto $s_V = v_V t$. Joe na koni mal na začiatku rýchlosť v_J a zrýchľoval so zrýchlením $a = 1 \text{ ms}^{-1}$, teda $s_J = v_J t + \frac{1}{2} a t^2$. Z tejto kvadratickej rovnice vypočítame $t = 6$ s. Vlak sa pohyboval rýchlosťou $v_V = s_V / t = 54 \text{ m} / 6 \text{ s} = 9 \text{ ms}^{-1}$.

b) V okamihu, keď Joe dobehne vlak, sa kôň pohybuje rýchlosťou $v = v_J + at = 7 \text{ ms}^{-1} + 1 \text{ ms}^{-1} \cdot 9 \text{ s} = 16 \text{ ms}^{-1}$.

Správna odpoveď: a) $9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ b) $13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
0 bodov za nesprávnu odpoveď



<http://www.p-mat.sk/fyziq>

4. ročník

fyziQ

kat. S2

Vzorové riešenia

2. séria zimnej časti pre žiakov 2. ročníka SŠ a sexty gymnázia

① a) Keď poznáme tlak p , teplotu T a objem V plynu, vieme zo stavovej rovnice $pV = NkT$ vypočítať počet molekúl N , ktoré sú v tomto objeme. Nezabudnime, že T je absolútna teplota počítaná v Kelvinoch. Teplotu, tlak, objem a počet molekúl na hladine mora označíme T_1 , p_1 , V_1 a N_1 , tie isté hodnoty vo výške 12 km označíme T_2 , p_2 , V_2 a N_2 . Vieme, že $V_1 = V_2 = 1 \text{ m}^3$. Vypočítame pomer N_1/N_2 .

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{p_1 V_1}{k T_1}}{\frac{p_2 V_2}{k T_2}} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{100 \text{ kPa} \cdot (-53,7 + 273,15) \text{ K}}{20 \text{ kPa} \cdot (12 + 273,15) \text{ K}} = 3,847 \approx 3,85$$

To znamená, že vo výške 12 km je v 1 m^3 vzduchu **3,85krát menej** molekúl ako na hladine mora.

b) Hustota je vlastne hmotnosť 1 m^3 danej látky. Poznáme mólové hmotnosti kyslíka a dusíka, takže potrebujeme vypočítať, koľko mólov vzduchu je v 1 m^3 . Použijeme na to druhý tvar stavovej rovnice $pV = nRT$. Počet mólov n_2 v 1 m^3 vzduchu s teplotou T_2 a tlakom p_2 je

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{20000 \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3}{8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot (-53,7 + 273,15) \text{ K}} = 10,96714 \text{ mol}$$

80% z tohto množstva je N_2 a 20% je O_2 . Hmotnosť 1 m^3 , teda hustota vzduchu je

$$\rho = 0,2 \cdot n_2 \cdot M(O_2) + 0,8 \cdot n_2 \cdot M(N_2) = [0,2 \cdot M(O_2) + 0,8 \cdot M(N_2)] n_2 = [0,2 \cdot 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 0,8 \cdot 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}] \cdot 10,96714 \text{ mol} = 315,85 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3} = 315,85 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Hustota vzduchu vo výške 12 km nad hladinou mora je **$315,85 \cdot 10^{-6} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$** .

Správna odpoveď: a) **3,85 krát** b) **$0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$**

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
2 body za odpoveď $0,00032 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ v b)
1 bod za odpoveď 0,26 krát alebo 3,8 krát alebo 3,87 krát v a)
1 bod za odpoveď $0,32 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ alebo $316 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

② Na začiatok niekoľko vzťahov, ktoré budeme potrebovať. N molekúl plynu s teplotou T má vnútornú energiu $E = \frac{1}{2} NkT = \frac{1}{2} N m_0 v^2 = \frac{1}{2} m v^2$, kde m_0 je hmotnosť jednej molekuly plynu, $m = N m_0 = nM$, hmotnosť celého plynu, n počet mólov plynu, M jeho mólová hmotnosť a v stredná kvadratická rýchlosť molekúl. Ďalej použijeme stavovú rovnicu $pV = NkT$.

a) Tlak plynu súvisí teplotou cez stavovú rovnicu. Teplota je mierou vnútornej energie plynu a tá závisí od strednej kvadratickej rýchlosti a hmotnosti plynu. Vyjadríme zo stavovej rovnice plyn a odvodíme vzťah, v ktorom vystupujú len známe veličiny a konštanty.

$$p = \frac{NkT}{V} = \frac{1/2 mv^2}{V}$$

Stredná kvadratická rýchlosť molekúl v a hmotnosť plynu v nádobách sú rovnaké. Rovnaký je aj objem plynov, pretože plyny sú v rovnakých nádobách. Pomer tlakov vodíka a kyslíka v nádobách je

$$\frac{p_H}{p_O} = \frac{\frac{1/2 m_H v_H^2}{V_H}}{\frac{1/2 m_O v_O^2}{V_O}} = 1.$$

b) Zo vzťahu medzi teplotou a vnútornou energiou vyjadríme teplotu a pokúsime sa odtiaľ odvodit' vzťah, v ktorom vystupujú len známe veličiny a konštanty.

$$T = \frac{mv^2}{Nk} = \frac{mv^2}{nN_A k} = \frac{Mv^2}{N_A k}$$

Pomer teplôt vodíka a kyslíka v nádobách teda bude $\frac{T_H}{T_O} = \frac{M_H}{M_O} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

Správna odpoveď: a) C b) žiadna

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
2 body za odpoveď 1:16 v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

③ V tomto príklade budeme používať kalorimetrickú rovnicu $Q = mc(T_2 - T_1)$. Táto rovnica hovorí, že na zohriatie látky hmotnosti m s tepelnou kapacitou c z teploty T_1 na teplotu T_2 treba látke dodať teplo Q .

a) Z grafov vieme zistiť, koľko tepla prijalo mlieko a hrniec počas zohrievania. Z prvého grafu vypočítame tepelnú kapacitu hrnca a použijeme ju na výpočet hmotnosti mlieka v hrnci z druhého grafu. Tepelnú kapacitu hrnca označíme c_h , memnú tepelnú kapacitu mlieka m_m , hmotnosť mlieka v hrnci pred vykypením m_1 a teplo prijaté hrncom a mliekom Q_1 . Potom podľa prvého grafu platí $Q_1 = (c_m m_1 + c_h)(100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = (c_m m_1 + c_h) \cdot 80^\circ\text{C}$. Hmotnosť 0,6 l mlieka je 0,6 kg. Vypočítame c_h :

$$c_h = \frac{Q_1}{80^\circ\text{C}} - c_m m_1 = \frac{204\text{kJ}}{80^\circ\text{C}} - 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 0,6\text{kg} = 0,03\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Z druhého grafu získame rovnicu $Q_2 = (c_m m_2 + c_h)(100^\circ\text{C} - 47,5^\circ\text{C}) = (c_m m_2 + c_h) \cdot 52,5^\circ\text{C}$, kde m_2 je hmotnosť mlieka v hrnci po doliatí a Q_2 teplo prijaté hrncom a mliekom. Vyjadríme odtiaľ m_2 a dosadíme za c_h z prvej rovnice.

$$m_2 = \frac{Q_2}{52,5^\circ\text{C} \cdot c_m} - \frac{c_h}{c_m} = \frac{189\text{kJ}}{52,5^\circ\text{C} \cdot 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} - \frac{0,03\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}}{4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = \frac{189\text{kJ} - 0,03\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 52,5^\circ\text{C}}{52,5^\circ\text{C} \cdot 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,85\text{kg}$$

Pred vykypením bolo v hrnci 0,6 l mlieka. Štvrt' litra z neho vykypelo, teda ostalo 0,35 l. Po doliatí ďalšieho mlieka bolo v hrnci 0,85 l mlieka. Do hrnca sme teda doliali 0,85 l - 0,35 l = 0,5 l mlieka.

b) Po vykypení ostalo v hrnci 0,35 l, teda 0,35 kg mlieka s teplotou 100°C. Do hrnca sme vzápätí doliali 0,5 l, teda 0,5 kg, mlieka s neznámou teplotou T , a keď sa teploty vyrovnali,

mlieko aj hrniec mali teplotu 47,5°C. Z týchto údajov vieme zostaviť nasledujúcu kalorimetrickú rovnicu. Z nej vypočítame T .

$$(0,35\text{kg} \cdot 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} + 0,03\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (100^\circ\text{C} - 47,5^\circ\text{C}) = 0,5\text{kg} \cdot 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (47,5^\circ\text{C} - T)$$

$$T = 47,5^\circ\text{C} - \frac{(0,35\text{kg} \cdot 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} + 0,03\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (100^\circ\text{C} - 47,5^\circ\text{C})}{0,5\text{kg} \cdot 4,2\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 10^\circ\text{C}$$

Teplota mlieka, ktoré sme doliali do hrnca, bola 10°C.

Správna odpoveď: a) 0,5 l b) 10°C

Bodovanie: 2 body za správnu odpoveď
1 bod za odpoveď 0,5 l v a)
0 bodov za nesprávnu odpoveď

④ Veľkosť obvodovej rýchlosti telesa, ktoré sa pohybuje uhlovou rýchlosťou ω po kruhovej dráhe s polomerom r , je $v = \omega r$. Uhlová rýchlosť je $\omega = \varphi / t$, kde φ je uhol v radiánoch a t je čas, za ktorý teleso tento uhol prešlo.

a) Aby sa Janka so Slavkom znovu stretli, museli spolu obehnúť celý kruh, čo je uhol 2π . Odkedy Slavko vybehol, stretli sa ešte trikrát. Spolu teda prešli tri kruhy (medzi každými dvomi nasledujúcimi stretnutiami jeden). Slávko prebehol jeden kruh, takže Janka musela prejsť dva. To znamená, že Janka sa pohybovala dvakrát väčšou uhlovou rýchlosťou ako Slavko – za rovnaký čas prešla dvakrát väčší uhol $\omega_J = 2\omega_S$. Slavkova uhlová rýchlosť je $\omega_S = v_S / r_S$, Jankina uhlová rýchlosť $\omega_J = v_J / r_J$, kde v_S a v_J sú veľkosti Slavkovej a Jankinej obvodovej rýchlosti a r_S a r_J polomery ich dráh. Dosadíme a vypočítame v_J .

$$\omega_J = 2\omega_S$$

$$\frac{v_J}{r_J} = 2 \frac{v_S}{r_S}$$

$$v_J = 2 \frac{v_S r_J}{r_S} = 2 \frac{2\text{ms}^{-1} \cdot 1\text{m}}{3\text{m}} = \frac{4}{3} \text{ms}^{-1} = 1,33\text{ms}^{-1}$$

Janka sa vzhľadom na zem pohybuje rýchlosťou veľkosti 1,33 ms⁻¹.

b) Janka mala dvakrát väčšiu uhlovú rýchlosť ako Slavko, preto za určitý čas prešla vždy dvakrát väčší uhol ako Slavko. Medzi dvomi nasledujúcimi stretnutiami prešli spolu uhol 2π . Janka preto od jedného stretnutia k druhému prešla uhol $4\pi/3$ (dve tretiny kruhu) a Slavko uhol $2\pi/3$ (jednu tretinu kruhu). Keďže sa obaja pohybovali konštantnou uhlovou rýchlosťou, uplynul medzi dvomi nasledujúcimi stretnutiami vždy rovnaký čas. Vypočítame, koľko trvalo, kým Slavko prebehol uhol $2\pi/3$, teda dráhu $2\pi r_S/3$. Slavko bežal rýchlosťou v_S , preto mu prebehnutie dráhy $2\pi r_S/3$ trvalo $t = \frac{2\pi \cdot r_S}{3v_S} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3\text{m}}{3 \cdot 2\text{ms}^{-1}} = 3,14\text{s}$. Medzi tým, čo

Slavko na Janku zakričal druhý a tretí raz, uplynulo 3,14 s.

Správna odpoveď: a) 1,33 ms⁻¹ b) 3,14 s

Bodovanie: 2 body za 1,33 alebo 4/3 alebo 1,33 alebo 1,333 v a)
2 body za 3,14 s alebo π v b)
0 bodov za nesprávnu odpoveď